

СЕНТЯБРЬ/ОКТЯБРЬ

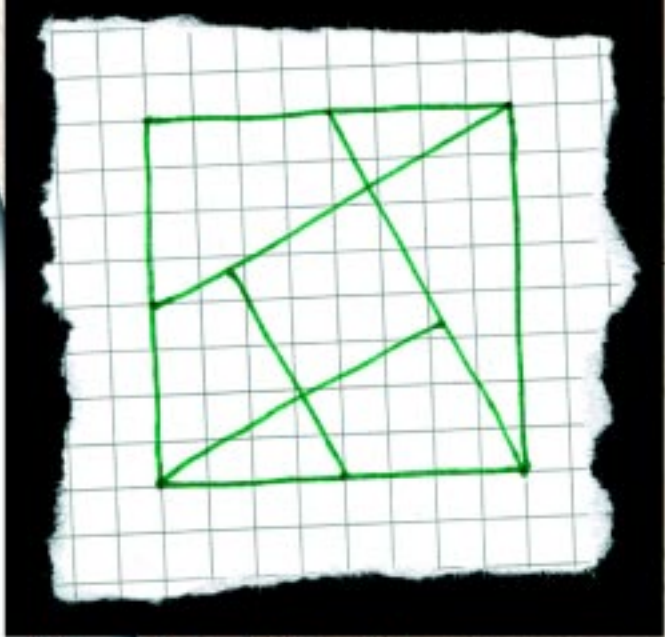
ISSN 0130-2221
2005 · №5

КВАНТ

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ ДЛЯ ШКОЛЬНИКОВ И СТУДЕНТОВ



Коллекция Коллекция Коллекция
ГОЛОВОЛОМКИ



Если квадратный кусок картона разрезать на несколько частей, например на семь, то получится головоломка, которая называется "складушка". Из ее кусочков можно собирать различные плоские фигуры. В этих фигурах задается только наружный контур, но неизвестно, как уложить в него семь элементов.

Все фигуры, построенные из элементов одной головоломки, имеют равные площади. Из геометрии известно, что среди фигур одинаковой площади наименьшим периметром обладают выпуклые многоугольники. Периметр фигуры - это ее контур. Он состоит из границ (краев) отдельных кусочков "складушки". В решенной задаче видны все границы кусочков, в нерешенной - только те границы, которые составляют контур фигуры. Чем большую долю границ вы видите, тем легче решить задачу. Так, фигуру бегущего человека, составленную из семи кусочков, собрать гораздо проще, чем выпуклый многоугольник, например прямоугольник. Поэтому самые трудные задачи в "складушках" - это задачи по сборке выпуклых многоугольников. И чем больше их можно собрать, тем лучше данная головоломка.

В 2003 году клуб ценителей головоломок "Диоген" и клубный журнал "Шарада" объявили конкурс на изобретение самой лучшей, т.е. самой сложной "складушки". Победителем стал Геннадий Ярковой из города Тольятти. Именно его головоломку вы видите на фотографии. Из семи ее кусочков можно собрать 136 выпуклых многоугольников, в том числе 53 шестиугольника, 37 пятиугольников, 22 семиугольника, 15 четырехугольников, 8 восьмиугольников и 1 треугольник. Пока что ни одна другая игрушка-головоломка в мире не обладает этим свойством. Вам предлагается собрать по одному многоугольнику двенадцати видов, т.е. решить 12 задач. Сложите из семи кусочков 5 симметричных фигур: прямоугольник, трапецию, пятиугольник, шестиугольник, семиугольник и 7 несимметричных: треугольник, параллелограмм, трапецию, разносторонний четырехугольник, пятиугольник, шестиугольник и семиугольник.

А.Калинин

РЕКОРДНАЯ «СКЛАДУШКА»

В номере:



Учредители — Президиум Российской академии наук, Фонд поддержки фундаментальной науки и образования (Фонд Осипьяна)

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

Ю.А.Осипьян

ПЕРВЫЕ ЗАМЕСТИТЕЛИ
ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА

С.С.Кротов, С.П.Новиков

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

А.Я.Белов, Ю.М.Брук, А.А.Варламов,
А.Н.Виленкин, С.А.Гордюнин,
Н.П.Долбилин

(заместитель главного редактора),

В.Н.Дубровский, А.А.Егоров,
А.Р.Зильберман, В.В.Козлов,

С.П.Коновалов, А.А.Леонович, Ю.П.Лысов,
В.В.Можаев, В.В.Произволов, Н.Х.Розов,
А.Б.Сосинский, А.Л.Стасенко, В.Г.Сурдин,
В.М.Тихомиров, В.А.Тихомирова, В.М.Уроев,
А.И.Черноуцан

(заместитель главного редактора)

РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ

А.В.Анджанс, В.И.Арнольд, М.И.Башмаков,
В.И.Берник, В.Г.Болтянский, А.А.Боровой,
Н.Н.Константинов, Г.Л.Коткин,
Е.Л.Сурков, Л.Д.Фаддеев

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ
1970 ГОДА

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

И.К.Кикоин

ПЕРВЫЙ ЗАМЕСТИТЕЛЬ
ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА

А.Н.Колмогоров

Л.А.Арцимович, М.И.Башмаков,
В.Г.Болтянский, И.Н.Бронштейн,
Н.Б.Васильев, И.Ф.Гинзбург, В.Г.Зубов,
П.Л.Капица, В.А.Кириллин, Г.И.Косоуров,
В.А.Лешковцев, В.П.Лишевский,
А.И.Маркушевич, М.Д.Миллионщиков,
Н.А.Патрикеева, Н.Х.Розов,
А.П.Савин, И.Ш.Слободецкий,
М.Л.Смолянский, Я.А.Сморodinский,
В.А.Фабрикант, Я.Е.Шнайдер

Бюро



Квантум

© 2005, Президиум РАН,
Фонд Осипьяна, «Квант»

- 2 Динамика паникующей толпы. *К.Богданов*
8 Числа Пизо. *А.Егоров*

ИЗ ИСТОРИИ НАУКИ

- 14 Карлов университет. *А.Васильев*

ЗАДАЧНИК «КВАНТА»

- 15 Задачи М1966–М1975, Ф1973–Ф1982
17 Решения задач М1946–М1950, Ф1958–Ф1967

К М Ш

- 23 Задачи
24 Конкурс имени А.П.Савина «Математика 6–8»
24 Об одном математическом случае (окончание).
С.Дворянинов
27 Победители конкурса имени А.П.Савина «Математика 6–8»
2004/05 учебного года

ШКОЛА В «КВАНТЕ»

- 28 Ворона — хвостом вперед? *В.Козлов*
29 От пяди до Вселенной. *С.Иншаков*

КАЛЕЙДОСКОП «КВАНТА»

- 32 Излучение

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТАТИВ

- 35 Физика таранного устройства. *С.Серохвостов, А.Хищенко*

ПРАКТИКУМ АБИТУРИЕНТА

- 38 Посмотрим сквозь линзу. *В.Дроздов*
41 Иррациональность и квадратный трехчлен. *В.Голубев*

ОЛИМПИАДЫ

- 45 XXXI Всероссийская олимпиада школьников по математике
48 XXXIX Всероссийская олимпиада школьников по физике
52 Международный турнир «Компьютерная физика»
56 XII Всероссийская заочная математическая олимпиада
школьников

РЕЦЕНЗИИ, БИБЛИОГРАФИЯ

- 57 Полезная книга по физике
58 Ответы, указания, решения

НА ОБЛОЖКЕ

- I Иллюстрация к статье «Динамика паникующей толпы»
II Коллекция головоломок
III Шахматная страничка
IV Университеты мира на монетах и банкнотах

Динамика паникующей толпы

К. БОГДАНОВ

ПАНИКА – ЭТО ЧУВСТВО СТРАХА, КОТОРОЕ, охватывая сначала небольшую группу людей, затем передается остальным, перерастая в неуправляемый процесс. Природа человека такова, что часто в экстренных ситуациях каждый человек ведет себя так же, как и все вокруг. Именно поэтому коллектив людей, объятых паникой, по существу перестает быть коллективом, теряет его признаки, становясь неуправляемой толпой.

История хранит много примеров того, к каким человеческим трагедиям приводила паника толпы. Одна из них – Ходынская катастрофа, или просто «Ходынка»

– произошла на северо-западе Москвы во время народного гулянья 18 мая 1896 года в дни коронации императора Николая II. По традиции, народ, присутствующий при коронации нового царя, всегда одаривали подарками. А в тот раз ходили слухи, что подарки будут очень дорогими.¹ Поэтому привлеченная бес-

¹ На самом деле, подарочный набор включал в себя завязанные в платок булку, пряник, колбасу, немного сушеных фруктов и орехов, а также эмалированную – в то время большая диковинка – кружку с императорскими вензелями. С этой кружкой можно было подойти к многочисленным крамам с пивом и медовухой.



платными гостинцами и зрелищами публика начала стекаться к Ходынкскому полю еще с вечера, а к рассвету, когда число страждущих увеличилось до полумиллиона, если не более, прошел слух, что буфетчики начали оделять «своих» и что припасенного на всех не хватит. По свидетельству очевидцев, толпа вдруг вскочила, как один человек, и бросилась вперед, как будто от пожара. Между тем, местность, на которой были выстроены 150 будок с подарками и 10 пивных павильонов, была отделена от страждущих огромным оврагом (3 метра в глубину и 30 в ширину), откуда муниципальные службы обычно брали песок, необходимый для содержания в порядке московских улиц. В ответ на летевшие со всех сторон требования начать раздачу гостинцев растерявшиеся буфетчики принялись швырять узелки в толпу наугад – и тут началось самое страшное. Киоски брали штурмом, задние ряды напирала на средние... Произошла давка, в которой погибли, по официальным данным, 1389 человек и около 1300 получили увечья. По свидетельству А.С.Суворина, кружка из подарочного набора стоила 10 копеек и на 5 копеек было гостинцев – вот и вся стоимость подарка, за который столько людей заплатили жизнью. Для очистки совести Николай II распорядился выплатить каждой семье погибших по 1000 рублей.

Кстати сказать, и в других странах случалось подобное. Так, в 1887 году, когда в Великобритании отмечали 50-летие вступления на трон королевы Виктории, в Лондоне при схожих обстоятельствах погибли около 4000 человек – и ничего, придворные церемонии не были нарушены.

Можно ли избежать давки? Конечно, да! Но прежде чем давать конкретные советы, посмотрим, как возникает давка, используя для этого методы физики сложных систем – раздела физики, изучающего системы, состоящие из большого числа объектов, взаимодействие между которыми подчиняется каким-либо определенным законам. Такими объектами могут быть атомы, молекулы или песчинки, образующие дюны, а также люди, механически взаимодействующие друг с другом в толпе.

Какие силы действуют на человека в толпе

В соответствии со вторым законом Ньютона, для того чтобы предсказать поведение толпы через интервал времени Δt , необходимо знать положение и скорость каждого человека и силы, действующие на него в данный момент t . Другими словами, нам необходимо написать соответствующие уравнения для всех членов толпы, а потом решить эту систему уравнений.

Сначала перенумеруем всех людей в толпе, состоящей из N человек, выберем человека под номером i и рассмотрим силы, действующие на него. Очевидно, что одна из сил, заставляющих человека i двигаться, это горизонтальная проекция силы реакции опоры, т.е. земли, отталкиваясь от которой он и движется в избранном направлении. Обозначим эту силу \overline{F}_{3i} . Наталкиваясь на препятствия, которыми могут быть и

остальные люди из толпы, человек i испытывает на себе действие силы сопротивления, которую мы обозначим \overline{F}_{ci} . Таким образом, если допустить, что все люди в толпе имеют одинаковую массу m (например, 80 кг), то уравнение второго закона Ньютона для i -го человека толпы принимает вид

$$m \frac{\Delta \overline{v}_i}{\Delta t} = \overline{F}_{3i} + \overline{F}_{ci}, \quad (1)$$

где $\Delta \overline{v}_i$ – изменение скорости i -го человека, произошедшее за интервал времени Δt в результате действия сил, стоящих в правой части уравнения.

Теперь займемся каждой из упомянутых сил. Рассмотрим сначала, чем руководствуется каждый из нас, оказавшись в толпе одержимых идти куда-то. Пусть, например, все стремятся выйти из помещения, где начался пожар. Тогда, очевидно, вектор силы \overline{F}_{3i} будет направлен к ближайшей двери, а абсолютная величина F_{3i} будет зависеть от того, насколько человек удовлетворен своей скоростью движения в сторону заветной двери. Иными словами, F_{3i} можно считать пропорциональной разности между «желаемой» для данного человека скоростью движения \overline{v}_{0i} и настоящим ее значением \overline{v}_i . Это предположение позволяет записать следующее соотношение для \overline{F}_{3i} :

$$\overline{F}_{3i} = m \frac{\overline{v}_{0i} - \overline{v}_i}{\tau}, \quad (2)$$

где τ – коэффициент пропорциональности, имеющий размерность времени, который сопоставим с интервалом, необходимым человеку для разгона до «желаемой» скорости (пусть, например, $\tau = 0,5$ с). Нетрудно догадаться, что вектор \overline{v}_{0i} всегда направлен в сторону двери, а его абсолютная величина характеризует стремление охваченного паникой человека выбраться из горящего помещения. Каждому человеку кажется, что, чем больше будет значение v_{0i} , тем раньше он выберется оттуда. Таким образом, v_{0i} может служить мерой паники в толпе.

После того как с помощью формулы (2) описана сила, влекущая i -го человека к двери, рассмотрим силы его взаимодействия с препятствиями, встречающимися на пути. Очевидно, что даже в условиях паники человек предпочитает не подходить вплотную к впереди идущему, если, конечно, его не толкают в спину сзади. Такое нежелание находиться очень близко к другим людям эквивалентно существованию некой силы отталкивания между людьми, которая возрастает с уменьшением расстояния между ними, аналогично кулоновской силе взаимодействия одноименных зарядов. Для простоты последующих вычислений можно считать, что на i -го человека со стороны j -го человека действует отталкивающая сила, абсолютное значение которой равно

$$F_{ij} = Ae^{-\frac{|\overline{z}_i - \overline{z}_j| - D}{B}}, \quad (3)$$

где D – поперечный размер человека (пусть $D = 0,6$ м), A и B – постоянные (равные 2000 Н и 0,08 м

соответственно), а вертикальными скобками обозначено абсолютное значение разности векторов, проведенных из начала координат к i -му человеку (\vec{z}_i) и j -му человеку (\vec{z}_j), которое равно расстоянию между этими людьми. Так, в соответствии с формулой (3), коснувшиеся друг друга люди противостоят отталкивающей силе в 2000 Н, которая при их взаимном отдалении уменьшается в e раз через каждые 8 см.

Как показывает житейский опыт, двигаясь, человек избегает касания не только с другими пешеходами, но и со стенами и прочими ограждениями. Для описания этой характеристики движения i -го человека введем отталкивающую силу, действующую на него со стороны ближайшего участка стены перпендикулярно ее поверхности, и обозначим ее $\overline{F_{cti}}$. Очевидно, что формула для значения абсолютной величины этой силы может иметь вид, аналогичный (3), а именно

$$F_{cti} = Ae^{-\frac{d_i - D/2}{B}}, \quad (4)$$

где d_i – кратчайшее расстояние между i -м человеком и ближайшей стеной, A и B – те же, что и для силы (3).

Силы, «отталкивающие» человека от препятствий, описанные формулами (3) и (4), помогают ему избегать столкновений, но не всегда. В тех случаях, когда плотность людей и их «желаемая» скорость велики, сумма сил $\overline{F_{ij}}$ и $\overline{F_{cti}}$ не спасает их от столкновений. Кроме того, столкновению людей между собой и со стенами способствуют необходимые иногда повороты на пути к выходу. Поэтому для полного описания сил, действующих во время давки, необходимо ввести силы упругого взаимодействия и трения при столкновении людей между собой и людей со стенами.

Для простоты будем считать, что при столкновении людей между собой и со стеной их можно заменить вертикально стоящими цилиндрами с круговым поперечным сечением диаметром D . Очевидно, что столкновение таких цилиндров, моделирующих людей под номерами i и j , происходит тогда, когда расстояние между их осями становится меньше D . Величину силы упругого взаимодействия, отталкивающей их друг от друга, в соответствии с законом Гука, можно описать формулой

$$F_{yij} = k(D - |\vec{z}_i - \vec{z}_j|), \quad (5)$$

где k – коэффициент, пропорциональный жесткости человека в поперечном направлении (120000 Н/м). Формула, аналогичная (5), очевидно, справедлива и для столкновения i -го человека со стеной и имеет следующий вид:

$$F_{ycti} = k(D/2 - d_i), \quad (6)$$

где d_i – минимальное расстояние между осью i -го цилиндра и стеной в области их контакта.

Что касается силы трения $\overline{F_{tpi}}$, действующей на i -го человека при столкновении с «чужой» поверхностью, то ее величина будет зависеть, во-первых, от того, с

какой скоростью v_{pi} он будет двигаться вдоль «чужой» поверхности, и, во-вторых, от величины деформации Δ при столкновении, которая заключена в скобки в формулах (5) и (6). Если эти величины известны, то сила трения при столкновении, действующая в сторону, противоположную скорости, равна

$$\overline{F_{tpi}} = -b\overline{V_{pi}}\Delta, \quad (7)$$

где b – коэффициент трения (120000 кг/(м·с)).

Таким образом, сила $\overline{F_{ci}}$, стоящая в правой части равенства (1), является суммой сил, описанных формулами (3) – (7). При этом если i -й человек одновременно сталкивается с несколькими другими, то выражения (3), (5) и (7) следует вычислять для всех столкнувшихся людей. Кроме того, для всех них необходимо вычислять алгебраическую сумму сил, приложенных к каждому из них в радиальном направлении, так как известно, что если эта величина превысит 3000 Н, то человек может потерять сознание и стать жертвой паники. А всякий, кто теряет сознание в результате давки, перестает двигаться и поэтому становится дополнительным препятствием для толпы на ее пути.

Пора включить компьютер!

Читатель уже наверняка устал от формул и коэффициентов, взятых, как он, возможно, считает, с потолка. Автор частично разделяет такую оценку, обещая больше не испытывать терпение читателя. Искусство моделирования и заключается в том, чтобы вовремя остановиться. Кроме того, очевидно, что полностью описать в терминах физики и математики такие сложные процессы, как поведение человека, вообще невозможно. И все-таки попробуем предсказать движение толпы, используя формулы (1) – (7), хотя наверняка такое описание является весьма приближенным.

Пусть в прямоугольном зале дискотеки размером 20 на 7 метров находится N человек и в момент времени $t = 0$ внезапно происходит возгорание электроаппаратуры, стоящей в углу зала. В результате возникает паника, и все устремляются к выходу. Чтобы начать моделировать движение толпы, нам необходимо задать начальные условия – положение людей и скорости их движения в момент времени $t = 0$. Поэтому с помощью компьютера распределим людей по залу так, как это показано на рисунке 1, и для простоты положим, что в момент времени $t = 0$ все люди стояли практически неподвижно и ждали, когда наконец включат музыку, т.е. $v_i = 0$ для $1 \leq i \leq N$. Ну, а теперь начнем писать программу, которая могла бы отслеживать движение каждого человека в толпе.

Программа должна, учитывая расположение и скорости людей в момент времени t , для каждого i -го человека вычислить сумму сил, стоящую в правой части уравнения (1), а потом найти приращение $\overline{\Delta v_i}$, произошедшее за интервал времени $\overline{\Delta t}$. После этого программа вычисляет новые значения $\overline{v_i}$, соответству-

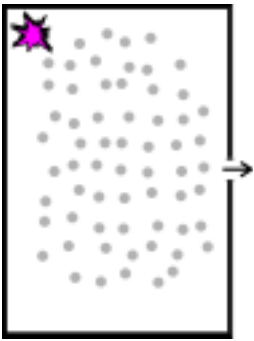


Рис.1. Распределение людей в прямоугольной комнате размером 20×7 м в начальный момент времени $t = 0$ ($v_0 = 0$). Люди обозначены серыми кружочками диаметром 0,6 м. Стрелкой показан выход через дверь шириной $b = 1,5$ м

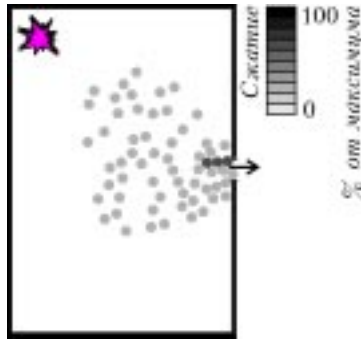


Рис.2. Полученное в результате моделирования распределение людей в комнате через 4 с после начала паники ($v_0 = 1,1$ м/с, $b = 1,5$ м). Плотность закрашивания соответствует величине суммарной силы сжатия, приложенной к каждому человеку со стороны окружающих людей и стены, в соответствии со шкалой, показанной здесь же

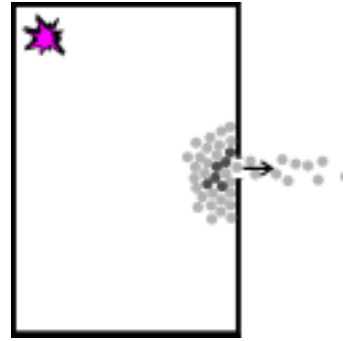


Рис.3. Распределение людей в комнате через 22 с после начала паники ($v_0 = 1,1$ м/с, $b = 1,5$ м), когда почти половина из них уже вышли из помещения. Как видно, перед дверью образовалась группа людей мешающих друг другу выйти (блок)

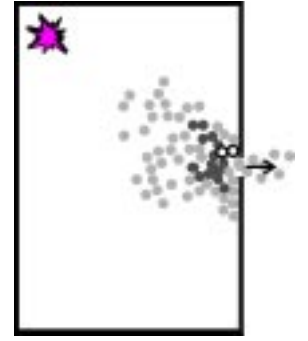


Рис.4. Распределение людей в комнате через 4 с после начала паники ($v_0 = 1,7$ м/с, $b = 1,7$ м). Появились первые жертвы (изображены черными бубликами), суммарная сила сжатия которых превысила допустимый максимум 3000 Н

ющие моменту $t + \Delta t$, и передвигает i -го человека в направлении вектора $\vec{v}_i + \Delta \vec{v}_i$ на расстояние, равное $|\vec{v}_i + \Delta \vec{v}_i| \Delta t$. И все повторяется снова.

Очевидно, что чем меньше будет значение Δt , тем точнее будут наши расчеты. Однако одновременно с увеличением точности расчетов растет время, необходимое компьютеру для решения задачи. Следует заметить, что с какого-то значения Δt , назовем его критическим, дальнейшее его уменьшение уже приводит к едва заметным изменениям. Поэтому Δt берут, например, в два раза меньше критического значения, значительно экономя, таким образом, время для вычислений. Исходя из этих соображений, было выбрано $\Delta t = 0,002$ с, что позволило потратить около 40 минут для моделирования движения толпы, состоящей из 60–70 человек, в течение одной минуты. Как оказалось, одной минуты вполне хватало этой «толпе», чтобы покинуть в панике помещение, правда оставив за собой нескольких «сдавленных» вертикальных цилиндров. Чтобы упростить вычисления, предполагалось, что абсолютное значение «желаемой» скорости v_{0i} у всех людей из толпы одинаково, и поэтому в дальнейшем оно обозначается как v_0 .

Посмотрим, что получилось

Как показывают результаты моделирования (рис. 2), проходит совсем короткий промежуток времени t_1 , всего несколько секунд, до того момента, когда первый человек выскакивает из помещения, и это время, конечно, уменьшается с ростом панических настроений (при увеличении v_0). Например, для начальных условий, изображенных на рисунке 1, время t_1 уменьшается с 7 до 4 с при увеличении v_0 с 0,7

до 1,7 м/с соответственно. Так что для людей, оказавшихся вблизи выхода, подтвердилось известное правило: «чем больше паникуешь, тем быстрее убежишь от неприятностей». Отметим, однако, что несколько человек, следующих за счастливыми, оказались сжатыми друг другом, что показано на рисунке 2 более интенсивным закрашиванием соответствующих кружочков.

На рисунке 3 изображено положение людей в толпе в момент времени $t_{1/2}$, когда уже половина людей вышли из помещения. Видно, что к этому времени у дверей образовалась почти симметричная толпа, и поэтому человек, оказавшийся в проеме двери, испытывает сжатие с разных сторон.

В таблице 1 приведена зависимость времени выхода первого человека (t_1 , лев. верх), половины всех людей ($t_{1/2}$, лев. низ), максимальной силы сжатия у дверей в процентах к допустимой (прав. верх) и количества жертв (прав. низ) от уровня паники (величины скорости v_0) и ширины дверей для начальных условий, изображенных на рисунке 1. Из таблицы следует, что рост скорости v_0 дает очень малый выигрыш для

Таблица 1

	Ширина двери $b = 1,1$ м		Ширина двери $b = 1,3$ м		Ширина двери $b = 1,5$ м		Ширина двери $b = 1,7$ м	
	7	46	7	46	6	44	6	39
Паника, $v_0 = 0,7$ м/с	50	нет	40	нет	29	нет	24	нет
Паника $v_0 = 1,1$ м/с	5	75	5	86	4	79	4	78
	60	нет	32	нет	22	нет	18	нет
Паника, $v_0 = 1,5$ м/с	4	95	4	> 100	4	99	3	93
	блок	нет	33	1	19	нет	15	нет
Паника, $v_0 = 1,7$ м/с	4	> 100	4	> 100	4	>100	3	> 100
	блок	3	27	2	35	2	17	5

большинства людей в толпе, особенно для маленьких дверей. Так, для двери шириной 1,3 м увеличение v_0 с 1,1 до 1,5 м/с вообще не приводит к уменьшению $t_{1/2}$. Кроме того, как иллюстрируют таблица 1 и рисунок 4, при панике и недостаточной ширине двери давление, сжимающее людей в центре толпы, часто достигает критического значения, после чего очередной «сдавленный» человек становится дополнительным препятствием для толпы, затрудняя ее движение. Поэтому для каждой группы людей, находящейся в данном помещении, существует некое значение v_0 , зависящее от ширины выходных дверей помещения, превышать которое не рекомендуется, если мы хотим избежать человеческой давки.

Как нетрудно догадаться, относительно малый эффект влияния увеличения v_0 на $t_{1/2}$ объясняется тем, что люди, сжимая друг друга, увеличивают силы трения между собой (см. уравнение (7)). В результате относительная доля усилий, затраченных на движение в сторону двери, уменьшается, а вместе с этим уменьшается и выигрыш от увеличения v_0 . В этом и заключается основное отличие между движением вязкой (но несжимаемой) жидкости через место сужения и движением толпы через дверь. В первом случае скорость потока жидкости прямо пропорциональна приложенному давлению. Толпа же по своим механическим свойствам близка к сжимаемой жидкости (например, жидкой резине), у которой вязкость (трение между соседними движущимися слоями) растет с ростом давления, и поэтому увеличение прикладываемого давления приводит к непропорционально меньшему росту скорости потока.

Как видно из таблицы 1, с ростом паники и сужением двери растет количество «сдавленных» людей, большая часть которых находится вблизи дверей. Это и неудивительно. Ведь у двери, находящейся в центре стены, сталкиваются, по крайней мере, три потока людей, стремящихся к выходу, — два вдоль стен и один перпендикулярный проему двери. В итоге давление на каждого человека, достигшего дверей, увеличивается, и если оно достигает критического значения, то этот человек становится жертвой толпы.

На рисунке 5 показано, как изменяется максимальное давление (сжатие) в толпе по мере того как люди покидают помещение. Видно, что самых высоких значений давление достигает в первые секунды после возникновения паники, когда разогнавшиеся люди, расположенные близко к дверям, сталкиваются друг с другом. Потом, с уменьшением количества людей в толпе, давление постепенно падает, испытывая большие колебания, соответствующие образованию и разрушению «дуги» из людей, не желающих пропускать друг друга (см., например, рисунок 3). Поэтому росту сжатия соответствует временное прекращение выхода людей из помещения (интервалы между 11 и 12 с, а также между 14 и 16 с на рисунке 5).

Очевидно, чтобы уменьшить количество жертв, нуж-

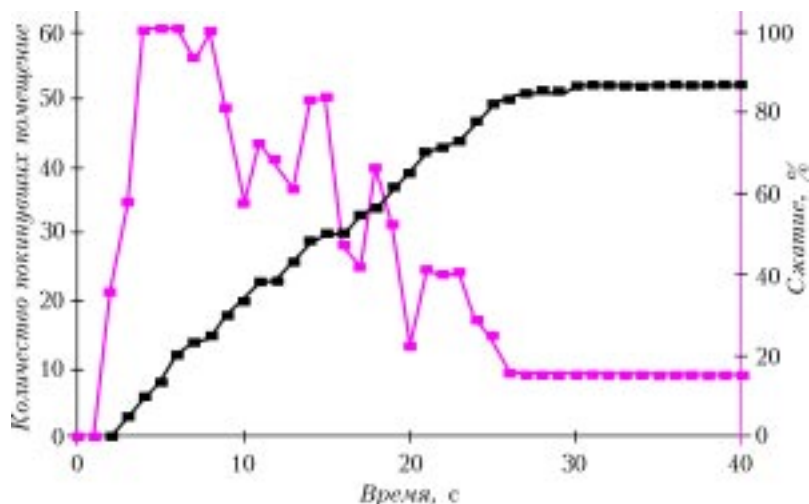


Рис.5. Зависимость количества людей, покинувших помещение (черная кривая), и максимальной величины сжатия в толпе (красная кривая) от времени, прошедшего после начала паники ($v_0 = 1,7$ м/с, $b = 1,7$ м, исходное число человек в комнате 63, пять из которых стали жертвами давки)

но уменьшить число пересекающихся потоков вблизи дверей, а еще лучше — исключить их пересечение вообще. Самое первое, что приходит в голову, это попросить всех стать в очередь. Конечно, в условиях паники это нереально, но помещение можно спроектировать так, чтобы даже паникующая толпа, подходя к дверям, вынуждена была выстраиваться в очередь.

Выстраиваем толпу в очередь

На рисунке 6 изображено помещение, выходя из которого, люди должны пройти через сужающийся коридор, в результате чего все они у дверей имеют один и тот же вектор «желаемой» скорости \bar{v}_0 . Иными словами, направляющий коридор, предшествующий дверям, препятствует возникновению встречных людских потоков у дверей. Поэтому разумно предположить, что при тех же начальных условиях толпа выйдет из помещения через сужающийся коридор быстрее и без жертв.

Результаты моделирования бегства толпы из такого помещения показаны на рисунках, которые иллюстрируют различные моменты движения: подход к направляющему коридору (рис.7), выстраивание в очередь и выход первого человека через дверь (рис.8), а также момент, когда половина людей покинули помещение (рис.9). Зависимость времени выхода первого человека (лев. верх), половины всех людей (лев. низ), максимальной силы сжатия у дверей в процентах к допустимой (прав. верх) и количества жертв (прав. низ) от уровня паники и ширины дверей для начальных условий, изображенных на рисунке 6, приведена в таблице 2 (построенной аналогично таблице 1).

Как и следовало ожидать, направляющий коридор значительно уменьшает давление людей друг на друга, делая его меньше критического, что исключает появление жертв давки в том же диапазоне изменения шири-

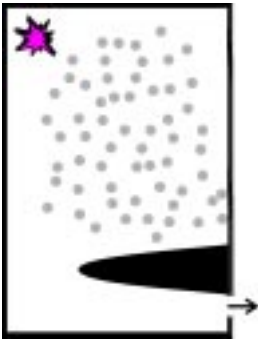


Рис.6. Помещение тех же размеров, что и на рисунке 1, но с направляющим коридором, предшествующим выходу. Исходное расположение людей то же, что и на рисунке 1, $v_0 = 0$

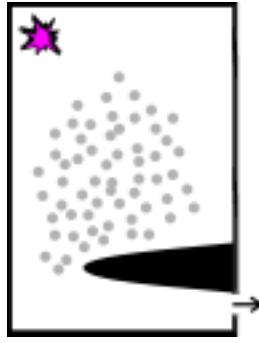


Рис.7. Распределение людей в комнате через 3 с после начала паники, когда первые люди достигли направляющего коридора ($v_0 = 1,7$ м/с, $b = 1,1$ м)

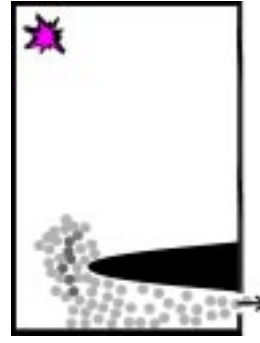


Рис.8. Распределение людей в комнате через 11 с после начала паники, когда первый человек покидает помещение ($v_0 = 1,7$ м/с, $b = 1,1$ м)

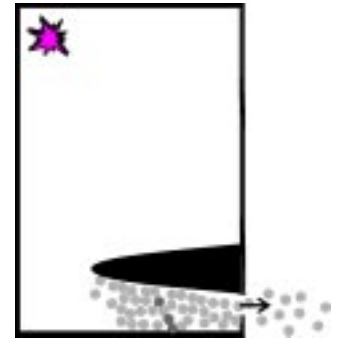


Рис.9. Распределение людей через 21 с после начала паники, когда почти половина людей покинули помещение ($v_0 = 1,7$ м/с, $b = 1,1$ м)

ны дверей и скорости v_0 . Кроме того, как иллюстрирует таблица 2, направляющий коридор делает зависимость времени $t_{1/2}$ от ширины двери еле заметной. Значит, действительно зависимость $t_{1/2}$ от ширины двери, имевшая место в том случае, когда дверь была

Продолжите сами, если вам интересно!

Моделируя движение толпы, мы рассмотрели всего два случая – дверь расположена в центре стены или имеется направляющий коридор. При этом всех людей мы сделали одинаковыми. А что будет, например, если в толпе есть дети, «диаметр» и масса которых, как известно, меньше, чем у взрослых? Как зависит количество жертв от разброса параметров людей? Кто страдает в первую очередь?

Мало того, что мы в своей модели сделали всех людей одинаковыми, мы лишили их разума, наделив только стремлением – вектором, направленным к двери. На самом деле, каждый человек даже в условиях паники оглядывается по сторонам и, если видит, что движение в направлении выхода затруднено, начинает искать обходные пути. Если ваша программа уже написана, попробуйте включить «оглядывание» в ее текст – полученные данные вас, по-видимому, удивят.

Мы не успели рассмотреть, как зависит давка от того, во что одеты люди. А ведь для этого достаточно только изменить коэффициент трения либо у всех сразу (давка под дождем), либо ввести разброс значений этого коэффициента. Кто окажется с большей вероятностью жертвой давки: человек в плаще из скользкой или из шершавой ткани? Как влияют трибологические (т.е. ответственные за трение) свойства покрытий внутренних стен помещений на количество жертв?

Заметим, что на все поставленные выше вопросы до сих пор нет достаточно вразумительных ответов.

Таблица 2

	Ширина двери $b = 1,1$ м		Ширина двери $b = 1,3$ м		Ширина двери $b = 1,5$ м		Ширина двери $b = 1,7$ м	
Паника, $v_0 = 0,7$ м/с	24	61	24	21	24	18	23	23
	45	нет	43	нет	42	нет	42	нет
Паника, $v_0 = 1,1$ м/с	16	58	16	48	16	58	16	32
	30	нет	28	нет	28	нет	27	нет
Паника, $v_0 = 1,5$ м/с	12	64	12	60	12	86	12	44
	23	нет	22	нет	22	нет	21	нет
Паника, $v_0 = 1,7$ м/с	11	68	11	77	11	94	11	60
	21	нет	20	нет	21	нет	18	нет

в середине стены (таблица 1), возникает из-за пересечения там нескольких потоков людей.

Интересно, что в тех случаях, когда ширина двери не позволяет через нее пройти сразу двоим (1,1 м), направляющий коридор практически устраняет зависимость сил сжатия и от уровня паники (v_0), которая присутствует при более широких дверях. Отсутствие роста сил сжатия при панике в этом случае тоже говорит о том, что траектории движения людей не пересекаются.

Направляющий коридор не только помогает исключить жертвы при выходе из помещений, но и значительно уменьшает длительность давки у дверей – интервал между тем как первый и последний человек покинули помещение. Таким образом, пропускающая способность двери растет не только с увеличением ее ширины, что естественно, но и в тех случаях, когда толпа вытягивается в очередь.

Числа Пизо

А.ЕГОРОВ

В ЭТОЙ СТАТЬЕ ПОЙДЕТ РЕЧЬ О ЧИСЛАХ С ОДНИМ удивительным свойством – их степени «почти целые». Это такие числа $\alpha > 1$, для которых расстояние от α^n (n – натуральное число) до ближайшего целого числа стремится к нулю. Мы постараемся понять, почему это происходит. Но сначала рассмотрим примеры.

Несколько примеров

В 50 – 60-х годах прошлого века на математических олимпиадах различных уровней и в разных странах были популярны задачи, сходные со следующей.

Задача 1. Найдите первые n знаков после запятой в десятичной записи числа $(5 + \sqrt{26})^n$.

Задача эта удивительно просто решается. Пусть $\alpha = 5 + \sqrt{26}$, а $\beta = 5 - \sqrt{26}$ – сопряженное с α число.

Слово «сопряженное» в данном случае означает, что α и β – корни уравнения $x^2 - 10x - 1 = 0$ с целыми коэффициентами.

Заметим, что если

$$\alpha^n = a_n + b_n\sqrt{26}, \text{ то } \beta^n = a_n - b_n\sqrt{26},$$

где a_n и b_n – натуральные числа. Но тогда

$$\alpha^n + \beta^n = 2a_n = A_n$$

– натуральное число. При этом

$$A_n - \alpha^n = \beta^n$$

и

$$|A_n - \alpha^n| = |\beta^n| = \frac{1}{(5 + \sqrt{26})^n} < \frac{1}{10^n}.$$

Таким образом, разность между α^n и A_n отличается от нуля меньше чем на $\frac{1}{10^n}$. Поэтому ($\beta < 0$) при четном n первые n цифр после запятой – девятки, а при нечетном n – нули. Задача решена.

Пока запомним, что α и β – иррациональные корни квадратного уравнения с целым коэффициентом, причем $\alpha > 1$, а $|\beta| < 1$.

Упражнения

1. Существует ли такое n , что в десятичной записи числа $(2 + \sqrt{2})^n$ окажется 1000 одинаковых цифр после запятой? Какие это цифры?

2. Те же вопросы для чисел $(8 + \sqrt{65})^n$.

3. Докажите, что при $n \geq 5k$ расстояние от числа $\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^n$ до ближайшего к нему целого числа меньше, чем $\frac{1}{10^k}$.

Введем теперь некоторые обозначения. Для данного числа a будем обозначать через (a) ближайшее к a целое число, а через $\{\{a\}\}$ – расстояние от a до (a) , т.е. $\{\{a\}\} = |(a) - a|$.

Определение 1. Будем говорить, что число α обладает свойством Пизо, если расстояние от α^n до ближайшего целого числа стремится к нулю, т.е. если $\{\{\alpha^n\}\} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Вот еще один пример. Рассмотрим теперь кубический многочлен

$$p(x) = x^3 - 3x^2 - 2x + 1.$$

Поскольку $p(3) < 0$, а $p(4) > 0$, многочлен p имеет корень на промежутке $(3; 4)$. Аналогично, так как $p(1) < 0$ и $p(0) > 0$, у него есть корень на интервале $(0; 1)$, а так как $p(-1) < 0$, то и на интервале $(-1; 0)$ также имеется корень этого многочлена. Итак, многочлен p имеет в точности 3 корня $\gamma \in (-1; 0)$, $\beta \in (0; 1)$, $\alpha \in (3; 4)$.

Упражнение 4. Докажите, что числа α , β , γ иррациональные.

Задача 2. Докажите, что число α обладает свойством Пизо.

Рассмотрим сумму

$$S_n = \alpha^n + \beta^n + \gamma^n.$$

Докажем, что S_n – целое число при любом n .

Для этого сначала вычислим S_1 , S_2 и S_3 .

По теореме Виета для кубических многочленов

$$\alpha + \beta + \gamma = 3, \quad \alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma = -2, \quad \alpha\beta\gamma = -1,$$

поэтому

$$S_2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = (\alpha + \beta + \gamma)^2 - 2(\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma) = 13.$$

Вычислить S_3 несколько сложнее. Для этого воспользуемся известной формулой

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - zy).$$

Подставляя вместо x , y и z числа α , β , γ , получим, что

$$S_3 = \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = 3(13 + 2) + 3 = 48.$$

Запишем очевидные равенства

$$\alpha^{n+3} - 3\alpha^{n+2} - 2\alpha^{n+1} + \alpha^n = 0,$$

$$\beta^{n+3} - 3\beta^{n+2} - 2\beta^{n+1} + \beta^n = 0,$$

$$\gamma^{n+3} - 3\gamma^{n+2} - 2\gamma^{n+1} + \gamma^n = 0.$$

Сложив их, получим

$$S_{n+3} - 3S_{n+2} - 2S_{n+1} + S_n = 0. \quad (1)$$

Далее рассуждаем по индукции. При $n = 1$ из того, что S_1, S_2, S_3 – целые числа, следует, что и S_4 – целое число.

Пусть S_{n+2}, S_{n+1} и S_n – целые числа. Но тогда из (1) следует, что S_{n+3} тоже целое.

Итак, S_n целое при любом n . Из неравенства

$$|S_n - \alpha^n| = |\beta^n + \gamma^n| \leq |\beta|^n + |\gamma|^n$$

и того, что $|\beta| < 1$ и $|\gamma| < 1$, вытекает, что

$$|S_n - \alpha^n| \rightarrow 0.$$

Но ведь это и есть свойство Пизо.

Упражнение 5. Найдите первые 100 знаков после запятой у числа $\alpha^{2000}, \alpha^{2001}$.

Как видите, мы довольно легко управились с поведением чисел α^n для кубического многочлена, все три корня которого действительны, причем один из них больше 1, а два оставшихся меньше единицы по модулю. Правда, пока мы еще никак явно не пользовались иррациональностью этих корней.

А что делать с кубическим многочленом, который имеет лишь один действительный корень? Рассмотрим соответствующий пример.

Задача 3. Пусть α – действительный корень многочлена $p(x) = x^3 - x - 1$. Докажите, что число α обладает свойством Пизо.

Решение. Исследование с помощью производной функции $y = x^3 - x - 1$ показывает, что этот многочлен имеет в точности один действительный корень α , причем $1 < \alpha < 2$. Пусть β и γ – комплексные корни этого многочлена. Можно доказать, что если $\beta = a + bi$, где a и b действительные, то $\gamma = a - bi$, так что $|\beta| = |\gamma| = \sqrt{a^2 + b^2}$. По теореме Виета

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 0, \\ \alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma = 0, \\ \alpha\beta\gamma = 1. \end{cases}$$

Из последнего равенства следует, что

$$|\beta|^2 = |\gamma|^2 = |\beta\gamma| = \frac{1}{\alpha}.$$

Поскольку свойства действий над комплексными числами такие же, как и над действительными, дословно повторяя рассуждения, проведенные при решении задачи 2, получим, что и здесь

$$S_n = \alpha^n + \beta^n + \gamma^n$$

– целое число. При этом

$$|S_n - \alpha^n| \leq |\beta|^n + |\gamma|^n < \frac{2}{(\sqrt{\alpha})^n}.$$

Но $\sqrt{\alpha} > 1$, так что разность $S_n - \alpha^n$ стремится к 0 и α обладает свойством Пизо.

Упражнение 6. Докажите, что первые 1000 знаков после запятой в десятичной записи числа α^{25000} из задачи 3 одинаковы.

Во всех рассмотренных нами примерах мы имели дело с иррациональными корнями квадратичных или кубических многочленов с целыми коэффициентами и старшим коэффициентом, равным 1. При этом все остальные корни этих многочленов были по модулю меньше 1. Не в этом ли причина явления, названного нами свойством Пизо?

Алгебраические числа и неприводимые многочлены

Здесь мы познакомимся с простейшими понятиями теории алгебраических чисел и неприводимых многочленов.

Определение 2. Число α (действительное или комплексное) называется алгебраическим, если существует многочлен

$$p(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n$$

с целыми коэффициентами a_0, a_1, \dots, a_n такой, что $p(\alpha) = 0$.

В этом определении мы можем считать, во-первых, что $a_0 > 0$ и, во-вторых, что числа a_0, a_1, \dots, a_n в совокупности взаимно просты.

Таким образом, алгебраические числа – это корни многочленов с целыми коэффициентами.

Ясно, что существует многочлен наименьшей степени, имеющий данное алгебраическое число α своим корнем. Такой многочлен называется *минимальным многочленом* числа α , а его степень – *степенью* числа α .

Рассмотренные нами ранее числа были алгебраическими числами второй и третьей степени.

Определение 3. Говорят, что многочлен $p(x)$ с целыми коэффициентами неприводим, если он не делится ни на какой многочлен с целыми коэффициентами, имеющий меньшую ненулевую степень.

Во множестве $\mathbf{Z}[x]$ всех многочленов с целыми коэффициентами неприводимые многочлены играют ту же роль, что и простые числа во множестве всех целых чисел. В частности, всякий многочлен из $\mathbf{Z}[x]$ может быть разложен в произведение неприводимых множителей и это разложение с точностью до постоянных сомножителей единственно.

Определение 4. Многочлен с целыми коэффициентами

$$p(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n$$

называется *примитивным*, если его коэффициенты в совокупности взаимно просты.

Важное свойство примитивных многочленов выражает следующая лемма.

Лемма Гаусса. Произведение двух примитивных многочленов – примитивный многочлен.

Лемма Гаусса доказывается вполне элементарно. Мы предлагаем вам доказать ее самостоятельно.

Упражнение 7. Прделайте это.

Из леммы Гаусса вытекает важное для нас в дальнейшем

Утверждение 1. Если многочлен $p(x) \in \mathbf{Z}[x]$ делится на примитивный неприводимый многочлен, то частное – многочлен с целыми коэффициентами.

Это значит, что если $p(x) = h(x)q(x)$, где многочлен $q(x)$ примитивен и неприводим, то $h(x)$ – многочлен с целыми коэффициентами.

Важным для нас будет и еще одно свойство.

Утверждение 2. Если два многочлена $f(x) \in \mathbf{Z}[x]$ и $p(x) \in \mathbf{Z}[x]$ имеют общий корень α : $f(\alpha) = 0$, $p(\alpha) = 0$, а многочлен $p(x)$ неприводим, то $f(x)$ делится на $p(x)$, т.е. $f(x) = h(x)p(x)$, где $h(x)$ – некоторый многочлен с рациональными коэффициентами. А если $p(x)$ еще и примитивен, то $h(x)$ имеет целые коэффициенты.

Верно также следующее утверждение.

Утверждение 3. Всякий неприводимый многочлен степени n имеет в точности n различных (действительных или комплексных) корней.

Доказательства всех перечисленных утверждений вы можете найти в любой книге, где подробно изложена теория многочленов, или же провести их самостоятельно.

И, наконец, приведем очень важное для дальнейшего

Утверждение 4. Минимальный многочлен всякого алгебраического числа α неприводим.

Это утверждение почти очевидно. В самом деле, если минимальный многочлен $p(x)$ числа α раскладывается на множители $p(x) = p_1(x)p_2(x)$, где $p_1(x)$, $p_2(x)$ – многочлены меньшей степени, то $p(\alpha) = p_1(\alpha)p_2(\alpha)$. И либо $p_1(\alpha) = 0$, либо $p_2(\alpha) = 0$. Но это противоречит минимальности многочлена $p(x)$.

Определение 5. Пусть α – алгебраическое число степени r и $p(x) = a_0x^r + \dots + a_r$ – минимальный многочлен числа α . Пусть $\alpha = \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ – его корни. Числа $\alpha_2, \dots, \alpha_r$ называются сопряженными с числом α .

Теорема Виета

Пусть $p(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n$ ($n \geq 1$) – произвольный многочлен с действительными или комплексными коэффициентами.

По основной теореме алгебры, он имеет действительный или комплексный корень (см., например, статью В.Тихомирова «Теоремы существования и основная теорема алгебры» в предыдущем номере журнала). Из основной теоремы следует, что

$$p(x) = a_0(x - x_1)(x - x_2)\dots(x - x_r),$$

где x_1, x_2, x_r – корни многочлена $p(x)$. Раскрывая скобки и приравнивая коэффициенты, получим равенства

$$a_1 = -a_0(x_1 + x_2 + \dots + x_r),$$

$$a_2 = a_0(x_1x_2 + x_1x_3 + \dots + x_{r-1}x_r),$$

...

$$a_k = (-1)^k a_0(x_1x_2\dots x_k + x_1x_2\dots x_{k-1}x_{k+1} + \dots + x_{r-k+1}\dots x_r),$$

...

$$a_n = (-1)^n a_0x_1x_2\dots x_r.$$

Здесь в k -й строчке стоят суммы всевозможных произведений по k сомножителей.

Выписанные соотношения называются теоремой Виета. Они обобщают хорошо известную школьникам теорему Виета для квадратного уравнения и несколько менее известную теорему Виета для кубического уравнения.

И, наконец, сформулируем еще одно утверждение, ранее доказанное нами для многочленов второй и третьей степеней.

Утверждение 5. Если $p(x) = x^r + a_1x^{r-1} + \dots + a_r$ – многочлен с целыми коэффициентами, x_1, x_2, \dots, x_r – его корни, $S_n = x_1^n + \dots + x_r^n$, то S_n – целое число при любом натуральном n .

Это утверждение мы также не будем здесь доказывать.

Целые алгебраические числа

Определение 6. Алгебраическое число α называется целым алгебраическим числом, если оно – корень неприводимого многочлена с целыми коэффициентами и старшим коэффициентом, равным 1.

Как видите, понятие целого алгебраического числа существенно отличается от привычного понятия целого числа. Прежде всего, сами целые числа – это целые алгебраические числа степени 1: они корни многочленов вида $p(x) = x - n$, где $n \in \mathbf{Z}$.

Целые же алгебраические числа более высоких степеней иррациональны. Корни многочленов из задач 1–3 – целые алгебраические числа степеней 2 и 3. Числа вида $\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{3}$ – это тоже целые алгебраические числа. Корни многочленов $2x^3 - 3x - 1, 3x^3 + 3x + 1$ не являются целыми алгебраическими.

Пусть α – целое алгебраическое число степени r , а числа $\alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_r$ – сопряженные с ним числа, т.е. остальные корни минимального многочлена $p(x)$ числа α . Из утверждения 4 следует, что

$$\alpha^n + \alpha_2^n + \dots + \alpha_r^n = S_n$$

– целое число при любом n .

Числа Пизо

Теперь приступим к главному в этой статье.

Определение 7. Действительное целое алгебраическое число $\alpha > 1$ называется числом Пизо, если все сопряженные с ним числа по модулю меньше 1.

Докажем, что числа Пизо обладают свойством Пизо.

Теорема 1. Если α – число Пизо степени $r > 1$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \{ \alpha^n \} = 0.$$

Доказательство. Пусть $\alpha = \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ – корни минимального многочлена $p(x) = x^r + a_1x^{r-1} + \dots + a_r$. Из утверждения 5 следует, что

$$S_n = \alpha^n + \alpha_2^n + \dots + \alpha_r^n$$

– целое число. Рассмотрим разность $S_n - \alpha^n = \alpha_2^n + \dots + \alpha_r^n$ и оценим ее модуль:

$$|S_n - \alpha^n| = |\alpha_2^n + \dots + \alpha_r^n| \leq |\alpha_2^n| + \dots + |\alpha_r^n|.$$

Поскольку $|\alpha_i| < 1$ при $i = 2, \dots, r$, правая часть последнего неравенства стремится к нулю и потому $S_n - \alpha^n \rightarrow 0$. Но это в точности значит, что $\{\{\alpha^n\}\} \rightarrow 0$.

Итак, мы обнаружили целый класс алгебраических чисел, обладающих свойством Пизо – это числа Пизо, т.е. действительные алгебраические числа, большие 1, все сопряженные которых по модулю меньше 1.

В дальнейшем мы увидим, что верна и обратная теорема: если действительное алгебраическое число $\alpha > 1$ обладает свойством Пизо, то оно является числом Пизо.

Однако сначала выясним, какие *целые* алгебраические числа обладают свойством Пизо.

Пусть $\alpha > 1$ – целое действительное алгебраическое число, а $p(x) = x^r + a_1x^{r-1} + \dots + a_r$ – его минимальный многочлен. Предположим, что

$$\{\{\alpha^n\}\} \rightarrow 0.$$

Пусть A_n – ближайшее к α^n целое число и

$$\{\{\alpha^n\}\} = |A_n - \alpha^n| \rightarrow 0.$$

Тогда $\alpha^n = A_n + \delta_n$, где $\delta_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Теперь умножим равенство

$$\alpha^r + a_1\alpha^{r-1} + \dots + a_r = 0$$

на α^n :

$$\alpha^{n+r} + a_1\alpha^{n+r-1} + \dots + a_r\alpha^n = 0.$$

Подставим в полученное равенство $\alpha^{n+r} = A_{n+r} + \delta_{n+r}$, $\alpha^{n+r-1} = A_{n+r-1} + \delta_{n+r-1}$, ..., $\alpha^n = A_n + \delta_n$.

Тогда

$$A_{n+r} + a_1A_{n+r-1} + \dots + a_rA_n + \gamma_n = 0, \quad (2)$$

где $\gamma_n = \delta_{n+r} + a_1\delta_{n+r-1} + \dots + a_r\delta_n$.

Ясно, что $\gamma_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Но число $A_{n+r} + a_1A_{n+r-1} + \dots + a_rA_n$ целое и потому при всех достаточно больших n

$$A_{n+r} + a_1A_{n+r-1} + \dots + a_rA_n = 0. \quad (3)$$

В самом деле, из того, что $\gamma_n \rightarrow 0$, следует, что существует такое N , что $|\gamma_n| < 1$ при всех $n \geq N$. Но при таких n равенство (2) возможно только при выполнении равенства (3).

Итак, числа A_n при $n \geq N$ удовлетворяют рекуррентному уравнению (3).

С этого момента линейные рекурренты становятся основным аппаратом наших исследований.

Но сначала выясним, как ведут себя степени рациональных чисел.

Рациональные числа

Если $\alpha = \frac{p}{q} > 1$ – несократимая дробь ($q > 1$), то α – корень уравнения первой степени $qx - p = 0$.

Докажем, что $\{\{\alpha^n\}\}$ не стремится к нулю.

Предположим, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \{\{\alpha^n\}\} = 0$.

Пусть $(\alpha^n) = A_n$, так что $\alpha^n = A_n + \delta_n$ и $\delta_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, $|\delta_n| = \{\{\alpha^n\}\}$. Но $q\alpha - p = 0$, поэтому $q\alpha^{n+1} - p\alpha^n = 0$, т.е.

$$q(A_{n+1} + \delta_{n+1}) - p(A_n + \delta_n) = qA_{n+1} - pA_n + \gamma_n = 0,$$

где $\gamma_n = q\delta_{n+1} - p\delta_n$, так что $\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n = 0$. Но число $qA_{n+1} - pA_n$ целое. Поэтому при достаточно больших n оно равно нулю, т.е.

$$A_{n+1} = \frac{p}{q}A_n \quad \text{при } n \geq N.$$

Но тогда

$$A_{n+k} = \left(\frac{p}{q}\right)^k A_N$$

при всех $k > 1$. Это невозможно, так как A_N не делится на q^k при достаточно больших k , т.е. A_{n+k} не целое.

Итак, не целые рациональные числа свойством Пизо не обладают.

В то же время обычные целые положительные числа, очевидно, являются числами Пизо.

Таким образом, все рациональные числа со свойством Пизо – целые.

Упражнение 7. Существует ли предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left\{ \left(\frac{3}{2} \right)^n \right\} \right\}$?

Квадратичные иррациональности

Рассмотрим квадратное уравнение

$$x^2 + px + q = 0$$

с целыми коэффициентами и иррациональными корнями $\alpha > 1$ и β .

Если $|\beta| < 1$, то α – число Пизо и, как нам уже известно, $\{\{\alpha^n\}\} \rightarrow 0$ (это, напомним, следует из того, что $S_n = \alpha^n + \beta^n$ целое при любом n).

Пусть $\{\{\alpha^n\}\} \rightarrow 0$. Докажем, что $|\beta| < 1$. Запишем для нашего случая уравнение (3). Если $A_n = (\alpha^n)$, то при всех достаточно больших n будет

$$A_{n+2} + pA_{n+1} + qA_n = 0.$$

Теперь нам предстоит немного отвлечься от основной темы и поговорить о линейных рекуррентных уравнениях.

Линейные рекурренты

Определение 8. Последовательность $x_0, x_1, \dots, x_n, \dots$ называется *линейной рекуррентой (ЛР) порядка k* , если существуют такие числа $a_0 \neq 0, a_1, \dots, a_k \neq 0$, что при любом натуральном n

$$a_0x_{n+k} + a_1x_{n+k-1} + \dots + a_kx_n = 0. \quad (4)$$

Иногда линейные рекурренты называются также *возвратными последовательностями*. Числа A_n , появившиеся выше, образуют линейную рекурренту порядка r . Также являются ЛР известные многим нашим

читателям числа Фибоначчи, т.е. последовательность $f_0, f_1, \dots, f_n, \dots$, для которой $f_0 = 1, f_1 = 1, f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$.

Любая геометрическая прогрессия u_n образует ЛР порядка 1: $u_{n+1} = qu_n$.

Всякая арифметическая прогрессия a_n является ЛР порядка 2, ибо для нее $a_{n+2} - a_{n+1} = a_{n+1} - a_n$, т.е. $a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n = 0$.

Заметим, что если две последовательности u_n и v_n удовлетворяют уравнению (4), то все последовательности вида $w_n = \lambda u_n + \mu v_n$ также удовлетворяют этому уравнению.

В самом деле,

$$\begin{aligned} & a_0 w_{n+k} + a_1 w_{n+k-1} + \dots + a_k w_n = \\ & = a_0 (\lambda u_{n+k} + \mu v_{n+k}) + a_1 (\lambda u_{n+k-1} + \mu v_{n+k-1}) + \dots \\ & \quad \dots + a_k (\lambda u_n + \mu v_n) = \\ & = \lambda (a_0 u_{n+k} + \dots + a_k u_n) + \mu (a_0 v_{n+k} + \dots + a_k v_n) = 0. \end{aligned}$$

Будем искать решения уравнения (4) в виде комбинации простейших решений. А поскольку простейшей линейной рекуррентой является геометрическая прогрессия, сначала будем искать решения в виде $x_n = \lambda^n$, где $\lambda \neq 0$.

Подставляя λ^n вместо x_n в (4), получаем

$$a_0 \lambda^{n+k} + \dots + a_k \lambda^n = 0.$$

После сокращения на λ^n приходим к уравнению

$$a_0 \lambda^k + \dots + a_k = 0,$$

которое называется *характеристическим уравнением* линейной рекурренты.

Сделаем некоторые упрощающие предположения. Именно, будем считать, что характеристическое уравнение имеет k различных ненулевых корней (этот случай и будет нужен в дальнейшем). Ясно, что все прогрессии вида λ_i^n ($i = 1, 2, \dots, k$) — решения ЛР.

Докажем теперь, что всякое решение ЛР можно «скомбинировать» из прогрессий.

Утверждение 6. *Всякое решение ЛР (4) представляется в виде*

$$x_n = c_1 \lambda_1^n + c_2 \lambda_2^n + \dots + c_k \lambda_k^n.$$

Прежде всего заметим, что ЛР однозначно определяется заданием первых k членов последовательности: x_0, x_1, \dots, x_{k-1} .

Будем искать решение в виде

$$x_n = c_1 \lambda_1^n + c_2 \lambda_2^n + \dots + c_k \lambda_k^n.$$

Подставляя сюда $n = 0, 1, \dots, k-1$, получим систему уравнений

$$\begin{cases} c_1 + c_2 + \dots + c_k = x_0, \\ c_1 \lambda_1 + c_2 \lambda_2 + \dots + c_k \lambda_k = x_1, \\ \dots \\ c_1 \lambda_1^{k-1} + c_2 \lambda_2^{k-1} + \dots + c_k \lambda_k^{k-1} = x_{k-1}. \end{cases}$$

Вспомним, что все числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ различны, и

рассмотрим многочлен

$$\begin{aligned} f_i(\lambda) &= \frac{f(\lambda)}{\lambda - \lambda_i} = \\ &= a_0 (\lambda - \lambda_1) \dots (\lambda - \lambda_{i-1}) (\lambda - \lambda_{i+1}) \dots (\lambda - \lambda_k) = \\ &= a_0 \lambda^{k-1} + \tilde{a}_1 \lambda^{k-1} + \tilde{a}_2 \lambda^{k-2} + \dots + \tilde{a}_{k-1}. \end{aligned}$$

Корни этого многочлена — это все числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$, кроме λ_i . Умножив первое уравнение на $\tilde{a}_{k-1,i}$, второе — на $\tilde{a}_{k-2,i}$, ..., последнее на a_0 и сложив полученные уравнения, придем к равенству

$$\begin{aligned} c_1 f_i(\lambda_1) + c_2 f_i(\lambda_2) + \dots + c_k f_i(\lambda_k) &= \\ &= a_{k-1,i} x_0 + \dots + a_0 x_{k-1} = M_i. \end{aligned}$$

Но $f_i(\lambda_j) = 0$ при $i \neq j$, а $f_i(\lambda_i) \neq 0$. Поэтому

$$c_i = \frac{M_i}{f_i(\lambda_i)}.$$

Тем самым утверждение 6 доказано.

Найдем, например, формулу для n -го числа Фибоначчи.

Характеристическое уравнение имеет вид

$$\lambda^2 - \lambda - 1 = 0.$$

Его корни $\lambda_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$, $\lambda_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$. Ищем решение в виде

$$f_n = c_1 \lambda_1^n + c_2 \lambda_2^n.$$

При $n = 0$ и $n = 1$ имеем

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0, \\ c_1 \lambda_1 + c_2 \lambda_2 = 1, \end{cases} \text{ откуда } c_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}, c_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Мы получили формулу Бине:

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right).$$

Любопытно, что в записи целых чисел Фибоначчи участвуют иррациональности.

Вот еще один пример ЛР:

$$x_0 = 0, x_1 = 1, x_{n+2} = 2x_{n+1} - 3x_n.$$

Характеристическое уравнение $\lambda^2 - 2\lambda + 3 = 0$ имеет комплексные корни: $\lambda_1 = 1 + i\sqrt{2}$ и $\lambda_2 = 1 - i\sqrt{2}$, а последовательность, состоящая из целых чисел, записывается так:

$$x_n = -\frac{i}{2\sqrt{2}} \left((1 + i\sqrt{2})^n - (1 - i\sqrt{2})^n \right),$$

т.е. в записи целочисленной последовательности участвуют даже мнимые числа.

Квадратичные иррациональности (завершение)

Вернемся к рассмотрению квадратичных иррациональностей.

Мы видели, что числа A_n при $n \geq N$ образуют ЛР:

$$A_{n+2} + pA_{n+1} + qA_n = 0.$$

Это значит, что

$$A_n = c_1\alpha^n + c_2\beta^n,$$

где c_1, c_2 – некоторые действительные числа, причем $c_1 \neq 0$ и $c_2 \neq 0$. (Если, например, $c_2 = 0$, то $A_{n+1}/A_n = \alpha$, что противоречит иррациональности числа α .)

Рассмотрим разность

$$A_n - \alpha^n = (c_1 - 1)\alpha^n + c_2\beta^n. \quad (5)$$

Нам известно, что $A_n - \alpha^n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Поэтому и $(c_1 - 1)\alpha^n + c_2\beta^n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Теперь докажем лемму из элементарного курса анализа.

Лемма. Если числа c_1, c_2, \dots, c_r не равны нулю, числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ попарно различны, не равны нулю и все отличны от 1, а последовательность

$$u_n = c_1\lambda_1^n + c_2\lambda_2^n + \dots + c_r\lambda_r^n$$

имеет предел, то $|\lambda_i| < 1$ при всех $i = 1, 2, \dots, r$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$.

Доказательство. Проведем индукцию по r . При $r = 1$ утверждение леммы очевидно. Пусть лемма справедлива для $r = k$, и

$$u_n = c_1\lambda_1^n + c_2\lambda_2^n + \dots + c_{k+1}\lambda_{k+1}^n.$$

Рассмотрим последовательность

$$\begin{aligned} w_n &= u_{n+1} - \lambda_1 u_n = \\ &= c_2(\lambda_2 - \lambda_1)\lambda_2^n + \dots + c_{k+1}(\lambda_{k+1} - \lambda_1)\lambda_{k+1}^n. \end{aligned}$$

Из существования предела последовательности u_n следует существование предела последовательности w_n , а из предположения индукции – справедливость леммы.

Из леммы сразу следует, что в нашем случае $c_1 = 1$, а $|\beta| < 1$. (Если $c_1 \neq 1$, то из существования предела последовательности $(c_1 - 1)\alpha^n + c_2\beta^n$ следовало бы, что $|\alpha| < 1$.)

Итак, $A_n = \alpha^n + c_2\beta^n$. Кроме того, разность

$$A_n - S_n = (c_2 - 1)\beta^n$$

тоже стремится к нулю (поскольку $|\beta| < 1$) и потому $A_n = S_n$ при достаточно больших n и $c_2 = 1$, т.е. $A_n = S_n$.

Мы доказали, что если иррациональный корень уравнения $x^2 + px + q = 0$ обладает свойством Пизо, то второй корень β по модулю меньше 1, т.е. α – число Пизо.

Итак, *целое* алгебраическое число второго порядка обладает свойством Пизо тогда и только тогда, когда оно является числом Пизо.

Кубические иррациональности

Пусть $\alpha > 1$ – целое алгебраическое число третьего порядка, т.е. корень уравнения

$$p(x) = x^3 + ax^2 + bx + c,$$

где a, b, c – целые числа, многочлен $p(x)$ неприводим, а β и γ – числа (действительные или комплексные), сопряженные с α .

Предположим, что $\{\{\alpha^n\}\} \rightarrow 0$ и докажем, что α – число Пизо. Для этого мы должны доказать, что $|\beta| < 1$, $|\gamma| < 1$.

Числа A_n в этом случае образуют ЛР, для которой

$$A_{n+3} + aA_{n+2} + bA_{n+1} + cA_n = 0$$

при достаточно больших n . Как мы видели,

$$A_n = c_1\alpha^n + c_2\beta^n + c_3\gamma^n$$

для некоторых c_1, c_2, c_3 .

Покажем, что ни одно из чисел c_1, c_2, c_3 не равно нулю.

Предположим, например, что $c_3 = 0$. Тогда

$$\begin{aligned} A_n &= c_1\alpha^n + c_2\beta^n, \\ A_{n+1} &= c_1\alpha^{n+1} + c_2\beta^{n+1}, \\ A_{n+2} &= c_1\alpha^{n+2} + c_2\beta^{n+2}. \end{aligned} \quad (6)$$

Пусть $q(x) = (x - \alpha)(x - \beta) = x^2 + kx + l$ – квадратичный многочлен с корнями α и β .

Умножим первое из равенств (6) на l , второе на k и сложим все три равенства:

$$A_{n+2} + kA_{n+1} + lA_n = c_1\alpha^n q(\alpha) + c_2\beta^n q(\beta) = 0,$$

т.е. целые числа A_n образуют линейную рекурренту второго порядка.

Докажем, что числа k и l рациональны. В самом деле, так как

$$\begin{cases} kA_{n+1} + lA_n = -A_{n+2}, \\ kA_{n+2} + lA_{n+1} = -A_{n+3} \end{cases}$$

пара (k, l) – решение системы из двух линейных уравнений с двумя неизвестными.

Вычислим определитель этой системы:

$$\begin{vmatrix} A_{n+1} & A_n \\ A_{n+2} & A_{n+1} \end{vmatrix} = A_{n+1}^2 - A_n A_{n+2} = -c_1 c_2 \alpha^n \beta^n (\alpha - \beta)^2 \neq 0.$$

Итак, решение системы единственно, а числа k и l , очевидно, рациональны.

Число α при этом оказывается корнем квадратного трехчлена $Mq(x)$ с целыми коэффициентами (M – общий знаменатель дробей k и l). Но это противоречит неприводимости многочлена $p(x)$. Здесь у нас впервые явно «сработала» неприводимость. Аналогично доказывается, что $c_1 \neq 0, c_2 \neq 0$.

Рассмотрим теперь разность

$$A_n - \alpha^n = (c_1 - 1)\alpha^n + c_2\beta^n + c_3\gamma^n.$$

Поскольку она стремится к нулю, а $\alpha > 1$, из леммы предыдущего пункта следует, что $c_1 = 1, |\beta| < 1$ и $|\gamma| < 1$. Итак, α – число Пизо.

Подведем итоги. Мы доказали, что *если целое алгебраическое число второго или третьего порядка обладает свойством Пизо, то оно является числом Пизо.*

Рассмотрение общего случая и окончательное решение задачи о числах Пизо мы отложим до следующего номера.

(Окончание следует)

Карлов университет

А. ВАСИЛЬЕВ

В СЕРЕДИНЕ XIV ВЕКА НАСЛЕДНИК ДРЕВНЕГО чешского королевского рода Пржемысловичей Карл IV почти одновременно получил титулы чешского короля и императора Священной Римской империи. Взойдя на престол, он предпринял активные действия по усилению политического, экономического и культурного влияния Чехии. Прежде всего, он поехал в Авиньон и испросил у папы Климента VI разрешения на учреждение пражского архиепископства, а затем и на создание Пражского университета. Документ от 7 апреля 1348 года гласил: «Чтобы не надо было нашим верным жителям королевства, неустанно алчущим плодов знаний, просить милостыню в чужой земле, но чтобы они находили в королевстве стол, гостеприимно для них приготовленный». Университет должен был стать «украшением Чешской короны» и способствовать распространению славы Чешского королевства во всех концах христианского мира.

Университет, который впоследствии стал именоваться Карлиным или Карловым университетом, стал первым высшим учебным заведением в Центральной и Восточной Европе. Он с самого начала создавался как общеевропейский интеллектуальный центр, где работали представители многих европейских народов. Университет включал четыре факультета: философский, где в основном занимались философией и другими, как тогда говорили, «свободными искусствами» (красноречием, музыкой, математикой); юридический, на котором изучалось право; медицинский, где кроме собственно медицины учащиеся получали сведения из области химии и естественных наук; богословский, который готовил образованных священников. Международным характер пражского университета подчеркивался равноправным положением в нем представителей разных стран, из которых в университет приезжали студенты и преподаватели, образовывавшие чешскую, польскую, саксонскую и баварскую «нации». Глава университета – ректор – избирался всеми преподавателями, которые назывались магистрами. Основной формой обучения в университете была лекция. Обычно магистр читал текст по книге (рукописной, книгопечатание еще не было изобретено), а студенты записывали за ним. Каждый магистр был волен в рамках своего курса определять его содержание, так что именно с университетской кафедры распространялись новые взгляды и новые теории.

Любимой формой соревнования в знаниях и в умении их отстаивать был ученый диспут. Его участники, как правило это были магистры, представлявшие различные направления, устраивали публичное обсуждение спорного вопроса. Каждый участник произносил речь,

отстаивая свою точку зрения и опровергая противника, а избранные на председательские места коллеги решали, кто оказался убедительнее. При этом поощрялось всячески ругать противника, обвиняя его во всевозможных грехах. Такое поношение рассматривалось лишь как внешний прием для дискредитации противника, выставления его прежде всего в нелепом и смешном виде. Научная аргументация, конечно же, была важна, однако не она определяла внешнюю форму диспута. Можно сказать, что диспут был местом публичного самоутверждения личности средневекового ученого, ведь именно здесь он мог показать всем свой объем знаний, что очень ценилось в средние века, так как разрыв между обладающим знаниями ученым меньшинством и остальным обществом, весьма мало образованным, будь то дворянин или крестьянин, был огромен. Диспуты ученых мужей бывали настолько горячими, что нередко кончались потасовкой.

Развитие общества и формирование научного мировоззрения в средние века в частности, проходило под знаком разрешения теологических проблем. В начале XV века в университете возникла научная оппозиция. Ее лидером стал знаменитый чешский реформатор Ян Гус. Он получил магистерскую степень в Пражском (Карловом) университете в 1396 году и в 1409–1410 годах был его ректором. Борьба чешской и немецкой партий внутри университета захватила Яна Гуса с головой. При его непосредственном участии в 1409 году король Вацлав IV издал Кутногорский декрет, отдавший управление университетом в руки магистров «чешской нации» в ущерб традиционной средневековой схеме, когда университетская политика определялась консенсусом четырех наций. В результате большинство немецких магистров покинули университет, повсюду распространяя слухи о коварных еретиках, оккупировавших почтенное имперское учреждение. Престиж Пражского университета и его уровень, разумеется, серьезно пострадали, но это было скорее побочным, чем прямым эффектом реформаторской деятельности Яна Гуса.

Высшим арбитром в делах веры должен был стать Вселенский собор, собравшийся в Констанце 5 ноября 1414 года. Ян Гус был вызван на собор для объяснений и явился туда. Однако он столкнулся с тем, что объяснений никто и не спрашивал. От Яна Гуса сразу потребовали отречься от всего, что он проповедовал, не объясняя, в чем собственно состоит его ересь. Он же в ответ требовал доказать ему, в чем его проповеди расходятся с Писанием. Разбирательство, не начав-

(Продолжение см на с. 22)

Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 1 декабря 2005 года по адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» №5–2005» и номера задач, решения которых Вы посылаете, например «М1966» или «Ф1973». В графе «От кого» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем Вашим адресом и необходимый набор марок (в этом конверте Вы получите результаты проверки решений).

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с Вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «Задачник «Кванта», новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором Вы учитесь.

Задачи М1966–М1969, М1971, М1972(а), М1973–М1975 предлагались на XXXI Всероссийской олимпиаде школьников по математике.

Задача М1970 предлагалась на XXVI Международном математическом турнире городов.

Задачи М1966 – М1975, Ф1973–Ф1982

М1966. Докажите, что если число $\underbrace{11\dots11}_{n \text{ единиц}} \underbrace{211\dots11}_{n \text{ единиц}}$ делится на 11, то оно также делится и на 121.

В. Сендеров

М1967. В наборе из одиннадцати различных по весу гирь каждая весит натуральное число граммов. Известно, что суммарный вес любых семи гирь больше суммарного веса четырех оставшихся. Найдите наименьший возможный суммарный вес всех гирь набора.

О. Подлипский, И. Богданов

М1968. Каждую вершину выпуклого четырехугольника Q отразили симметрично относительно диагонали, не содержащей эту вершину. Полученные точки являются вершинами четырехугольника Q' .

а) Докажите, что если Q – трапеция, то Q' также является трапецией.

б) Докажите, что отношение площади Q' к площади Q меньше 3.

Л. Емельянов

М1969. На оборотных сторонах 2005 карточек написаны различные числа (на каждой по одному). За один вопрос разрешается указать на любые три карточки и узнать множество чисел, написанных на них. За какое наименьшее число вопросов можно узнать, какие числа записаны на каждой карточке?

И. Богданов

М1970. Существует ли такой квадратный трехчлен $f(x)$, что для любого целого положительного n уравне-

ние $\underbrace{f(f(\dots f(x)))}_{n \text{ раз}} = 0$ имеет ровно 2^n различных действительных корней?

А. Толтыго

М1971. В таблице $2 \times n$ расставлены положительные числа так, что в каждом из n столбцов сумма двух чисел равна 1. Докажите, что можно вычеркнуть по одному числу в каждом столбце так, чтобы в каждой строке сумма оставшихся чисел не превосходила $\frac{n+1}{4}$.

Е. Куликов

М1972. На плоскости расположено бесконечное множество L прямых, никакие две из которых не параллельны. Известно, что как бы ни расположить на плоскости квадрат со стороной 1, он будет пересекаться хотя бы с одной прямой множества L . Докажите, что найдется квадрат со стороной а) 0,8; б) 0,75, который пересекается не менее чем с тремя прямыми множества L .

С. Волчёнков

М1973. В треугольнике ABC ($AB < BC$) точка I – центр вписанной окружности, M – середина стороны AC , N – середина дуги ABC описанной окружности. Докажите, что $\angle IMA = \angle INB$.

А. Бадзян

М1974. На бесконечном белом листе клетчатой бумаги конечное число клеток окрашено в черный цвет так, что у каждой черной клетки четное число (0, 2 или 4) белых клеток, соседних с ней по стороне. Докажите,

что каждую белую клетку можно покрасить в красный или зеленый цвет так, чтобы у каждой черной клетки стало поровну красных и зеленых клеток, соседних с ней по стороне.

А.Глебов, Д.Фон-Дер-Флаасс

М1975. а) За круглым столом сидят 100 представителей 50 стран, по двое от каждой страны. Докажите, что их можно разбить на две группы таким образом, чтобы в каждой группе было по одному представителю от каждой страны и каждый человек находился в одной группе не более чем с одним своим соседом.

б*) За круглым столом сидят 100 представителей 25 стран, по 4 представителя от каждой. Докажите, что их можно разбить на 4 группы таким образом, чтобы в каждой группе было по одному представителю от каждой страны и никакие двое из одной группы не сидели за столом рядом.

С.Берлов

Ф1973. Камень бросают под углом α к горизонту, придав ему начальную скорость v_0 . Точка падения камня на H ниже точки броска. Вектор скорости камня в полете поворачивается. Найдите максимальное и минимальное значения угловой скорости этого вращения. Земля, как известно, плоская; считайте, что воздуха на ней нет.

З.Рафаилов

Ф1974. По гладкому горизонтальному столу может двигаться куб массой M . На нем находится другой куб — поменьше, его масса m . На кубы действуют горизонтальные силы: F — на нижний и f — на верхний. Силы эти параллельны, приложены к центрам кубов и направлены в одну сторону. Найдите ускорения кубов. Коэффициент трения между верхним и нижним телами μ . Кубы двигаются поступательно, не вращаясь.

Р.Александров

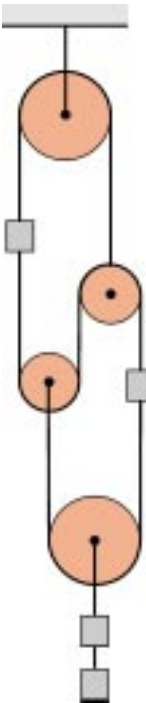


Рис. 1

Ф1975. В системе, изображенной на рисунке 1, грузы имеют одинаковые массы, блоки и нити очень легкие, нити нерастяжимы, свободные их куски вертикальны. Найдите ускорения блоков. Ось самого верхнего блока закреплена.

А.Блоков

Ф1976. Население Земного шара составляет в наши дни приблизительно 4,5 миллиарда человек. Сколько килограммов воздуха приходится на каждого человека?

А.Мальтусов

Ф1977. Средняя квадратичная скорость молекул воздуха в комнате 500 м/с, длина свободного пробега 0,01 мм. В данный момент выбранная для наблюдения молекула находится посередине квадратной комнаты площадью 25 м². Оцените среднее время, необходимое для ее путешествия до одной из стен.

А.Томов

Ф1978. Медная тонкостенная сфера радиусом R заряжена, полный заряд сферы Q . На расстоянии $R/3$ от центра сферы находится точечный заряд q , а на расстоянии $3R$ от центра сферы помещен точечный заряд $2q$. Найдите потенциалы центра сферы и самой сферы. Какой заряд протечет по тонкому проводу, если этим проводом сферу заземлить?

Ф.Изиков

Ф1979. В изображенной на рисунке 2 цепи конденсаторы одинаковы, емкость каждого $C = 100$ мкФ, резистор имеет сопротивление $R = 100$ кОм, батарейка с ЭДС $\mathcal{E} = 10$ В обладает внутренним сопротивлением $r = 1$ Ом. Цепь замыкают. Какой ток течет по резистору через время $\tau = 0,1$ с после включения, и какой ток в этот же момент течет через батарейку? Какое количество теплоты выделится в резисторе за большое время?

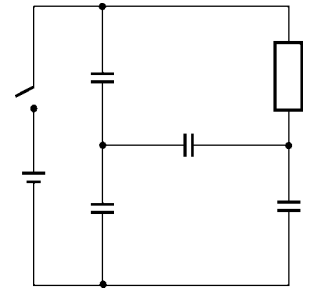


Рис. 2

А.Зильберман

Ф1980. В одной плоскости с длинным прямым проводом закреплено маленькое сверхпроводящее кольцо из очень тонкого провода. Диаметр кольца $d = 1$ см, центр кольца находится на расстоянии $H = 1$ м от провода, индуктивность кольца $L = 10$ мкГн. По проводу пропускают электрический ток — сила тока быстро возрастает от нуля до $I = 10$ А. Какой установившийся ток потечет по кольцу? Какая сила при этом будет действовать на кольцо?

З.Сильнов

Ф1981. К источнику переменного напряжения (звуковой генератор) подключена последовательная цепь, состоящая из катушки индуктивностью $L = 1$ Гн, конденсатора емкостью $C = 1$ мкФ и резистора сопротивлением R . Будем увеличивать частоту напряжения источника, сохраняя неизменной его амплитуду. При каких условиях напряжение, измеренное идеальным вольтметром на выводах конденсатора, будет при увеличении частоты вначале увеличиваться, а затем уменьшаться? На какой частоте напряжение конденсатора окажется максимальным при $R = 100$ Ом?

А.Повторов

Ф1982. Источник света, имеющий очень маленькие размеры, движется вдоль главной оптической оси собирающей линзы с постоянной скоростью v , а линза движется навстречу ему с неизменной скоростью $2v$. В некоторый момент скорость изображения оказалась по величине равной v (все три скорости заданы относительно неподвижной системы отсчета). Найдите увеличение, которое дает линза в этот момент. С каким ускорением движется в этот момент изображение? Изображение получают на экране, расположенном перпендикулярно главной оптической оси линзы, фокусное расстояние линзы F .

А.Старов

**Решения задач М1946–М1950,
Ф1958–Ф1967**

М1946. Пусть ABC – равнобедренный треугольник ($AC = CB$), AH и CL – высоты, I – центр вписанного круга. Докажите, что проекция CH стороны AC на сторону BC равна стороне AB в точности если $IH \parallel AB$.

Пусть $CH = AB$. Тогда из $\frac{AB}{HB} = \frac{AC}{AL}$ следует $\frac{CH}{HB} = \frac{AC}{AL}$. Отсюда по свойству биссектрисы $\frac{CH}{HB} = \frac{IC}{IL}$, а значит, $IH \parallel AB$. Эти же выкладки, проведенные в обратном порядке, доказывают и обратное утверждение.

А.Полянский, В.Сендеров

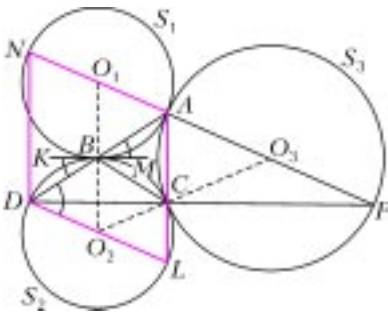
М1947. Квадрат натурального числа оканчивается на 3 одинаковые ненулевые цифры. Докажите, что предшествующая им цифра нечетна.

Если число x^2 оканчивается на \overline{cc} , где c – ненулевая цифра, то $c = 4$. В самом деле, в любом другом случае либо $x^2 \equiv 3 \pmod{4}$, либо $x^2 \equiv 2 \pmod{4}$; однако ни первое, ни второе невозможно.

Пусть $x^2 = A \cdot 10^4 + \overline{a4} \cdot 10^2 + 44$, где $A, \overline{a4}$ – неотрицательные целые числа. Если a четно, то $\overline{a4}$ делится на 4. Отсюда $\left(\frac{x}{2}\right)^2 = \dots 11 \equiv 3 \pmod{4}$, что невозможно.

В.Сендеров

М1948. Окружности S_1, S_2, S_3 попарно касаются друга друга внешним образом. Окружности S_1 и S_2 имеют одинаковые радиусы и касаются в точке B . Окружности S_1 и S_3 касаются в точке A . Окружность S_2 касается S_3 в точке C . Прямая AB вторично пересекает S_2 в точке D . Прямая DC вторично пересекает S_3 в точке F . Прямая FA пересекает вторично S_1 в точке N . Прямая AC вторично пересекает S_2 в точке L . Докажите, что четырехугольник $DNAL$ является ромбом.



Пусть O_1, O_2, O_3 – центры окружностей S_1, S_2, S_3 соответственно. Легко видеть, что $\Delta O_1O_2O_3$ равнобедренный. Поэтому $\angle O_2O_1O_3 =$

$= \angle O_1O_2O_3$ и $AB = BC$, поскольку радиусы S_1 и S_2 совпадают. Пусть KM есть общая внутренняя касательная к S_1 и S_2 в точке B (см. рисунок). Используя равенство радиусов S_1 и S_2 и формулу для угла между хордой и касательной, получим $\frac{1}{2} \overset{\cup}{AB} = \angle ABM = \angle KBD = \frac{1}{2} \overset{\cup}{DB}$. Таким образом, $AB = BD = BC$ и ΔADC прямоугольный. Поэтому $\angle ACF = \angle DCL = 90^\circ$ и AF является диаметром S_3 , а DL

является диаметром S_2 . Тогда AN есть диаметр S_1 и $AN = DL$. Так как $\angle F = \angle O_3CF = \angle DCO_2 = \angle CDO_2$, то $DO_2 \parallel O_3F$. Следовательно, $DNAL$ – параллелограмм. Так как ΔO_1AB равнобедренный, то

$$\begin{aligned} \angle NAB &= \angle O_1BA = \\ &= 90^\circ - \angle ABM = 90^\circ - \frac{1}{2} \overset{\cup}{AB} = \\ &= 90^\circ - \frac{1}{2} \overset{\cup}{BC} = 90^\circ - \angle BDC = \angle NDB. \end{aligned}$$

Поэтому ΔDNA равнобедренный и $NA = ND$. Следовательно, $DNAL$ является ромбом.

И.Рудаков

М1949. На координатной плоскости расположен правильный многоугольник M с центром $(0, 0)$ и одной из вершин $(1, 0)$.

а) Пусть $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ – множество проекций вершин многоугольника M на ось Ox . Докажите, что существует многочлен n -й степени с целыми коэффициентами, корнями которого являются числа $\alpha_1, \dots, \alpha_n$.

б) Пусть $\{\beta_1, \dots, \beta_m\}$ – множество проекций вершин многоугольника M на ось Oy . Докажите, что существует многочлен m -й степени с целыми коэффициентами, корнями которого являются числа β_1, \dots, β_m .

Ниже $A_n(x), \dots, D_n(x)$ – многочлены степени n с целыми коэффициентами.

Лемма.

$$\cos nx = A_n(\cos x),$$

$$\frac{\sin nx}{\sin x} = B_{n-1}(\cos x),$$

$$\frac{\sin(2n+1)x}{\sin x} = C_n(\cos 2x),$$

$$\sin(2n+1)x = D_{2n+1}(\sin x),$$

где во втором и третьем равенствах число $\frac{x}{\pi}$ не целое. Доказательство сразу получается по индукции с помощью тождеств

$$\cos kx = 2 \cos x \cos(k-1)x - \cos(k-2)x$$

и (*)

$$\sin kx = 2 \cos 2x \sin(k-1)x - \sin(k-4)x.$$

а) Если M – k -угольник, то либо $k = 2n - 1$, либо $k = 2n - 2$, где $n \geq 2$, либо $k = 2n - 2$, где $n \geq 3$.

Поскольку при $n \geq 2$ имеем $\frac{\sin(2n-1)\frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} = C_{n-1}(\cos x)$,

то попарно различные числа $\cos \frac{2\pi l}{2n-1}$, где $l = 1, \dots, n-1$, – корни многочлена $C_{n-1}(x)$.

Аналогично, попарно различные числа $\cos \frac{\pi l}{n-1}$, где $l = 1, \dots, n-2$, – корни многочлена $B_{n-2}(x)$ (здесь $n \geq 3$).

Следовательно,

$$P_n(x) = \begin{cases} (x-1)C_{n-1}(x) & \text{пр, } k=2n-1, \\ (x^2-1)B_{n-2}(x) & \text{пр, } k=2n-2. \end{cases}$$

б) Пусть по-прежнему M – k -угольник; тогда либо $k = m$, либо $k = 2m$, либо $k = 2m - 2$. Поскольку $m = 2t + 1$, то в случаях $k = m$ и $k = 2m$ имеем $Q_m(x) = D_m(x)$: попарно различные числа $\sin \frac{\pi l}{2t+1}$, где $l = 0, \pm 1, \dots, \pm t$ – корни последнего многочлена. Если же $k = 2m - 2 = 4t$, то множество проекций вершин k -угольника на ось Oy совпадает с множеством проекций его вершин на ось Ox . Отсюда $Q_m(x) = (x^2 - 1)B_{m-2}(x)$. Окончательно получаем:

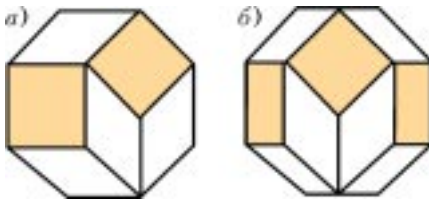
$$Q_m(x) = \begin{cases} D_m(x) & \text{пр, } k = m \\ D_m(x) & \text{пр, } k = 2m \\ (x^2 - 1)B_{m-2}(x) & \text{пр, } k = 2m - 2. \end{cases}$$

Замечание. Для нахождения многочленов $A_n(x), \dots$ можно воспользоваться получаемыми с помощью тождеств (*) и $\sin kx = 2 \cos x \sin(k-1)x - \sin(k-2)x$ рекуррентными соотношениями: $A_0(x) = 1$, $A_1(x) = x$, $A_{n+1}(x) = 2x A_n(x) - A_{n-1}(x)$ при $n \geq 1$; $B_0(x) = 1$, $B_1(x) = 2x$, $B_{n+1}(x) = 2x B_n(x) - B_{n-1}(x)$ при $n \geq 1$ и т.д. Подробнее о таких многочленах можно прочесть в статье Н.Васильева и А.Зелевинского «Многочлены Чебышёва и рекуррентные соотношения», опубликованной в «Кванте» №1 за 1982 год.

И.Дорофеев, В.Сендеров

M1950. *Правильный восьмиугольник легко разрезать на параллелограммы. Докажите, что правильный восьмиугольник нельзя разрезать на параллелограммы равной площади.*

Примеры простейших разрезов правильного восьмиугольника на параллелограммы показаны на рисунке. Если принять сторону восьмиугольника за 1, то в



этих примерах сумма площадей прямоугольников равна 2, и это не случайно. Так будет при любом разрезании, что читатель может доказать самостоятельно, а может найти подробное доказательство в книжке В.В.Произволова «Задачи на вырост» (Приложение к журналу «Квант» №5 за 2003 г.).

С другой стороны, легко понять, что площадь правильного восьмиугольника со стороной 1 равна иррациональному числу.

Сопоставив эти два факта, делаем вывод, что площади параллелограммов, на которые разрезан правильный восьмиугольник, не могут быть все равными.

В.Произволов

Ф1958. *На тонкий прямой стержень длиной $L = 10$ м посажены $N = 20$ одинаковых маленьких бусинок, которые могут скользить по нему без трения. Скорости бусинок одинаковы и составляют $v = 2$ м/с, а при столкновениях друг с другом и с концами стержня скорости бусинок меняют направление, оставаясь прежними по величине. В начальный момент половина бусинок едет вправо, половина – влево. Сколько ударов бусинок об упоры стержня произойдет за время $T = 1$ ч? А сколько всего ударов произойдет за это время между бусинками?*

При ударе друг о друга бусинки не изменяют величину скорости, а только меняют ее направление на противоположное – как будто они пролетают друг сквозь друга. Если до этого додуматься, то движение бусинок станет совсем простым – они просто летают без помех от одного конца стержня к другому и обратно.

Одна бусинка за время T пролетит длину стержня

$$\frac{vT}{L} = \frac{2 \text{ м/с} \cdot 3600 \text{ с}}{10 \text{ м}} = 720 \text{ раз.}$$

Ударов всех бусинок о концы стержня будет в N раз больше:

$$720 \cdot 20 = 14400.$$

(Конечно, точный ответ зависит от начального расположения бусинок, но за час разница получается ничтожной.)

Второй вопрос немного сложнее. Каждая бусинка за время прохождения в одну сторону ударится по разу о каждую из всех остальных бусинок, значит, она ударится о другие бусинки

$$\frac{(N-1)vT}{L} \text{ раз.}$$

Чтобы учесть все удары бусинок друг о друга, нужно умножить это число на N и разделить пополам – иначе каждый удар бусинок друг о друга мы посчитаем дважды (для одной и для другой). Окончательно получим

$$\frac{N(N-1)vT}{2L} = 136800 \text{ ударов.}$$

А.Бусин

Ф1959. *Материальная точка движется вдоль отрезка прямой, длина которого $L = 2$ м. Скорость точки в начале отрезка $v_1 = 0,2$ м/с, в конце отрезка $v_2 = 0,4$ м/с. Известно, что скорость все время увеличивалась, но ускорение не превосходило $a_0 = 0,1$ м/с². Каким могло быть среднее ускорение точки на этом отрезке?*

Скорость на отрезке возрастает на 0,2 м/с, но для нахождения среднего ускорения нужно знать длительность интервала времени, за который увеличивается скорость. А вот время путешествия явно может быть различным при разных «стратегиях» набора скорости. Для того чтобы среднее ускорение оказалось максимально возможным, нужно сократить время разгона, а для этого нужна как можно большая средняя ско-

рость. Способ понятен – по возможности быстрее набрать скорость $v_2 = 0,4$ м/с (ну, почти такую скорость, чтобы дальше она все же увеличивалась – это требует условие задачи). Время движения при этом будет равно времени разгона с ускорением $a_0 = 0,1$ м/с² плюс время прохода остатка пути со скоростью v_2 . Время разгона составляет 2 с, за которые точка пройдет 0,6 м и останется пройти 1,4 м. При скорости точки 0,4 м/с это потребует еще 3,5 с. Всего будет 5,5 с. Максимально возможное среднее ускорение при таких условиях составит

$$\frac{0,2 \text{ м/с}}{5,5 \text{ с}} = 0,0364 \text{ м/с}^2.$$

Для получения минимального среднего ускорения нужно постараться сделать время путешествия побольше – приберечь разгон напоследок, а весь возможный кусок пути двигаться с минимальной скоростью. Расчет простой – время разгона те же 2 с, путь за время разгона те же 0,6 м. Время движения составит 1,4 м : 0,2 м/с + 2 с = 9 с. Среднее ускорение при этом будет равно

$$\frac{0,2 \text{ м/с}}{9 \text{ с}} = 0,0222 \text{ м/с}^2.$$

Итак, среднее ускорение может быть в пределах от 0,0222 м/с² до 0,0364 м/с². Ничего более определенного тут сказать нельзя.

А.Простов

Ф1960. Туман состоит из огромного количества мельчайших капелек воды, неподвижно висящих в воздухе. Масса капелек в 1 л воздуха составляет 1 г (средняя плотность тумана получается в 1000 раз меньше плотности воды). Маленькая капля воды начинает падать на землю с высоты 5 м, «впитывая» встреченные капельки. Считая, что капля сохраняет форму шарика, найдите ее диаметр перед падением на землю.

Пусть в некоторый момент капелька имеет радиус r и проходит по вертикали очень маленький отрезок пути Δh . Считая, что радиус капельки изменился совсем немного, запишем ее приращение массы:

$$\Delta m = \rho_{\text{т}} \pi r^2 \Delta h = \rho_{\text{в}} \cdot 4\pi r^2 \Delta r,$$

откуда найдем

$$\Delta r = \frac{\rho_{\text{т}}}{4\rho_{\text{в}}} \Delta h.$$

Поскольку начальный радиус капли мал, ее диаметр перед падением на землю будет равен

$$d = 2 \frac{\rho_{\text{т}}}{4\rho_{\text{в}}} H = 2,5 \text{ мм}.$$

З.Рафаилов

Ф1961. На гладком горизонтальном столе лежит твердый кубик. На него налетает мягкий, довольно упругий кубик такой же массы, и между ними происходит лобовой удар. Скорость мягкого кубика после удара уменьшилась в 10 раз. Какая часть максимальной энергии деформации перешла в тепло при этом ударе? Считайте, что все тепло выделяется в мягком кубике при его деформировании.

Обозначим начальную скорость налетающего кубика v , его массу M . Тогда после удара его скорость будет $0,1v$, а скорость второго кубика составит $0,9v$ (закон сохранения импульса). Можно теперь выразить выделившееся количество теплоты:

$$\frac{Mv^2}{2} = \frac{M(0,1)^2 v^2}{2} + \frac{M(0,9)^2 v^2}{2} + Q,$$

откуда

$$Q = 0,18 \frac{Mv^2}{2}.$$

В условии просят найти отношение этого количества теплоты к максимальной величине энергии деформации при ударе. Найдем эту величину. Максимальная энергия деформации соответствует равенству скоростей тел в процессе удара, их кинетическая энергия в этот момент составляет $Mv^2/4$. Ясно, что остальные $Mv^2/4$ куда-то делись – действительно, энергия перешла в тепло, а остальная «недостача» как раз и есть энергия деформации. Логично предположить, что к этому моменту выделилась половина подсчитанного нами количества теплоты (тепло выделяется как при сжатии, так и при растяжении мягкого кубика). Тогда баланс энергий можно записать в виде

$$\frac{Mv^2}{2} = \frac{Mv^2}{4} + \frac{1}{2} Q + W_{\text{деф}}.$$

Отсюда получаем

$$W_{\text{деф}} = (0,5 - 0,09) \frac{Mv^2}{2} = 0,41 \frac{Mv^2}{2}.$$

Теперь находим искомое отношение:

$$\frac{Q}{W_{\text{деф}}} = \frac{0,18}{0,41} = \frac{18}{41} \approx 0,44.$$

А.Повторов

Ф1962. На сложенных вместе двух нитях длиной L каждая подвешено тело массой M (рис. 1). На расстоянии $L/3$ от верхнего конца между нитями вставили очень легкую горизонтальную распорку общей длиной d , состоящую из двух соединенных торцами половинок. Найдите силу, с которой одна половинка распорки действует на другую.

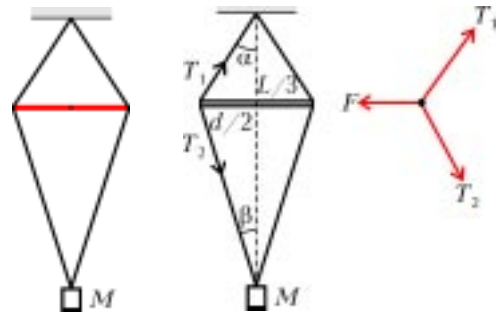


Рис. 1

Рис. 2

Для маленького кусочка нити, соприкасающегося с распоркой, сумма сил со стороны распорки и соседних участков нити равна нулю (рис.2):

$$F - T_1 \sin \alpha - T_2 \sin \beta = 0,$$

$$T_1 \cos \alpha - T_2 \cos \beta = 0.$$

Для подвешенного тела можно записать

$$2T_2 \cos \beta = Mg.$$

Из геометрических соображений,

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{d/2}{L/3} = \frac{3d}{2L}, \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{3d}{4L}.$$

После элементарных преобразований получим искомую силу:

$$F = \frac{9d}{8L} Mg.$$

А.Зильберман

Ф1963. На pV -диаграмме изображен замкнутый процесс (рис.1). Кривая – это дуга окружности, прямая вертикальна и соответствует охлаждению газа при постоянном объеме. Считая, что этот процесс проводят с порцией гелия, найдите КПД получившейся тепловой машины. Отношение максимального давления к минимальному в этом цикле равно 5, а минимальный объем составляет 0,9 от максимального.

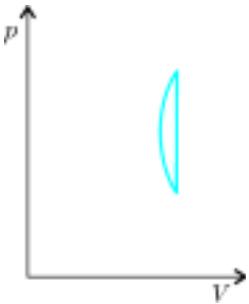


Рис. 1

Газ получает тепло на дуге окружности и отдает его на прямой. Для расчета КПД цикла нужно найти площадь, ограниченную сегментом (рис.2). Посчитаем эту площадь в «клеточках» – для расчета отношений это вполне допустимо. В наших

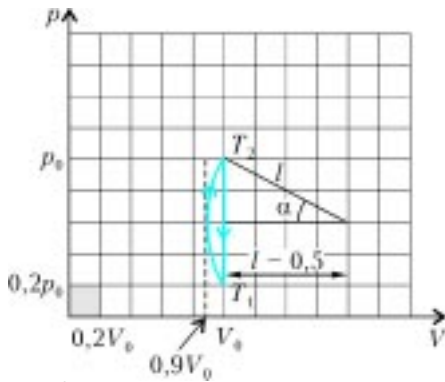


Рис. 2

обозначениях площадь клетки равна $0,2p_0 \cdot 0,2V_0$. Посчитаем радиус дуги:

$$(l - 0,5)^2 + 2^2 = l^2, \quad l^2 - l + 0,25 + 4 = l^2, \quad l = 4,25$$

и найдем угол α :

$$\alpha = \arcsin \frac{2}{4,25} \approx 0,49 \text{ рад}.$$

Площадь сегмента равна разности площади сектора и площади треугольника:

$$S_{\text{сег}} = S_{\text{сек}} - S_{\text{тр}} = \frac{2\alpha}{2\pi} \pi l^2 - \frac{1}{2} \cdot 4(l - 0,5) = \\ = \alpha l^2 - 2l + 1 \approx 8,85 - 8,5 + 1 \approx 1,35.$$

Работа в этом цикле равна

$$A = 1,35 \cdot 0,04p_0V_0.$$

Количество теплоты, полученное от нагревателя, составляет

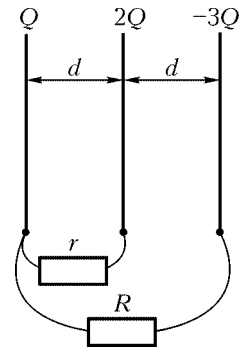
$$Q_{\text{н}} = A + \Delta U = A + \nu \cdot \frac{3}{2} R(T_2 - T_1) = \\ = A + \frac{3}{2} (p_0V_0 - 0,2p_0V_0) = \\ = 1,35 \cdot 0,04p_0V_0 + 1,2p_0V_0 = 1,254p_0V_0.$$

Тогда термодинамический КПД цикла будет равен

$$\eta = \frac{A}{Q_{\text{н}}} = \frac{1,35 \cdot 0,04p_0V_0}{1,254p_0V_0} \approx 0,043 = 4,3\%.$$

З.Циклов

Ф1964. Три большие проводящие пластины площадью $S = 2 \text{ м}^2$ каждая расположены параллельно другу другу, расстояние между соседними пластинами $d = 1 \text{ см}$. На одну из крайних пластин помещен заряд $Q = 1 \text{ мкКл}$, на вторую, среднюю, пластину – заряд $2Q$, на третью пластину – заряд $-3Q$. Между первой и второй пластинами подключают резистор сопротивлением $r = 100 \text{ Ом}$. Одновременно с этим резистор сопротивлением $R = 100 \text{ кОм}$ подключают между первой и третьей пластинами. Найдите количество теплоты, которое выделится в каждом из резисторов.



При таком большом отношении сопротивлений можно считать, что перераспределение зарядов между левой и средней пластинами (см. рисунок) происходит очень быстро – за это время по резистору сопротивлением R заряд практически не перетекает. Ясно, что весь заряд Q перетечет на среднюю пластину. Начальная разность потенциалов между этими пластинами равна

$$\Delta \varphi_{\text{нач}} = Ed = \left(\frac{Q}{2\epsilon_0 S} - \frac{2Q}{2\epsilon_0 S} + \frac{3Q}{2\epsilon_0 S} \right) d = \frac{Qd}{\epsilon_0 S} = \frac{Q}{C},$$

где $C = \frac{\epsilon_0 S}{d}$.

Количество теплоты, которое при этом выделится в резисторе сопротивлением r , можно найти по формуле

$$W_{\text{т1}} = \frac{1}{2} \Delta \varphi_{\text{нач}} Q = \frac{Q^2}{2C} \approx 2,8 \cdot 10^{-4} \text{ Дж}$$

(мы учли, что зависимость разности потенциалов от уже перетекшего заряда линейная).

Вторая часть расчета совсем простая – получается обычный конденсатор емкостью C с зарядами обкладок $3Q$ и $-3Q$. Тепло при этом выделится в резисторе сопротивлением R :

$$W_{\text{т2}} = \frac{(3Q)^2}{2C} = \frac{9Q^2}{2C} \approx 25,2 \cdot 10^{-4} \text{ Дж}.$$

А.Повторов

Ф1965. К батарее подключены три вольтметра, соединенные последовательно. Показания вольтмет-

ров составляют при этом 0,5 В, 1 В и 2 В (должно быть, разные попались вольтметры). Изменим соединение – подключим теперь два вольтметра параллельно, к ним присоединим последовательно третий вольтметр, а к выводам всей цепи подключим батарейку. Оказалось, что один из вольтметров при таком переключении свои показания не изменил. Что показывают остальные два вольтметра? Напряжения батареек считать неизменным.

Обозначим силу тока в цепи при последовательном соединении приборов через I . Сопротивления вольтметров относятся как 0,5 : 1 : 2, напряжение батареек составляет 0,5 В + 1 В + 2 В = 3,5 В.

При переключении ток в цепи явно изменился, поэтому остаться прежними могли только показания одного из параллельно соединенных приборов. Проанализируем возможности.

Пусть параллельно соединены вольтметры, показывающие 0,5 В и 1 В, и показания первого остались равными 0,5 В. Второй вольтметр при этом тоже показывает 0,5 В, через первый вольтметр течет ток I , через второй $0,5I$, суммарный ток течет через третий вольтметр, и он показывает $2 \cdot 1,5 \text{ В} = 3 \text{ В}$. В сумме 0,5 В и 3 В дают как раз 3,5 В – напряжение батареек. Итак, мы нашли подходящий вариант. Осталось проверить – нет ли других возможных вариантов.

Проверим вольтметр «1 В». Параллельно ему может быть подключен вольтметр «2 В», через него течет ток $I/2$, суммарный ток составляет $1,5I$, и сумма показаний получается $1 \text{ В} + 1,5 \cdot 0,5 \text{ В} = 1,75 \text{ В}$ – не подходит. Проверим вольтметр «2 В» с параллельным подключением «1 В»: ток $3I$, напряжение $2 \text{ В} + 3 \cdot 0,5 \text{ В} = 3,5 \text{ В}$ – подходит. Последняя возможная схема с параллельным подключением вольтметров «2 В» и «0,5 В» не подходит.

Таким образом, мы нашли целых два возможных варианта.

Р.Александров

Ф1966. В экономичном современном фонарике (вместо лампочки там используется очень яркой светодиод) применяют накопитель энергии – конденсатор большой емкости 0,1 Ф (это не шутка, такие конденсаторы выпускают уже больше 30 лет, в последние годы они сильно подешевели). А «накачивают» его энергией, встряхивая фонарик – при этом цилиндрический магнит длиной 2 см и диаметром 1 см проскакивает то в одну, то в другую сторону через катушку, содержащую 1000 витков и намотанную в 10 слоев на длине 2 см. Длина трубки, в которой движется магнит, равна 7 см, на концах трубки сделаны эластичные упоры – магнит при ударе о такой упор останавливается. Считая магнитную индукцию поля у торца магнита равной 0,2 Тл, оцените время, за которое можно зарядить конденсатор до напряжения 3 В. Чтобы конденсатор не разряжался через катушку, его подключают через диод.

Поле такого короткого магнита быстро спадает при удалении от его торца – магнитный поток Φ при «проскоке» меняется очень быстро, и ЭДС индукции

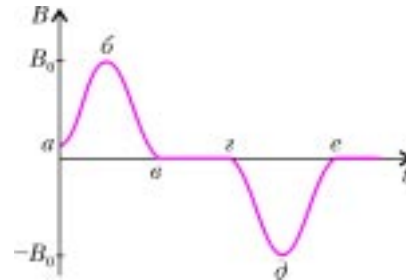
\mathcal{E} оказывается существенно больше напряжения, до которого заряжается конденсатор. Тогда можно записать

$$I \approx \frac{\mathcal{E}}{R},$$

где R – сопротивление цепи. Заряд, прошедший по цепи, равен

$$Q = \sum I \Delta t = \frac{\Delta \Phi}{R} \approx \frac{2SB_0N}{R}.$$

На пути в одну сторону конденсатор заряжается на участках ab и de (диод!), на обратном пути – на участках dc и cb (см. рисунок). Оценим сопротивление: 100 витков на длине намотки 2 см (1000 витков, 10 слоев) дают диаметр провода 0,2 мм, с учетом изоляции



– примерно 0,15 мм. Длина намотки составляет приблизительно 50 м. Тогда сопротивление медного провода катушки будет

$$R \approx 50 \text{ Ом}.$$

Заряд за один проход магнита равен

$$Q = \frac{SB_0N}{R} \approx 3 \cdot 10^{-4} \text{ Кл}.$$

При заряде конденсатора $Q_0 = CU_0 \approx 0,3 \text{ Кл}$ нужно «тряхнуть» фонарик примерно 1000 раз. Если тряхни туда-обратно 5 раз в секунду (вполне реально), потребуется

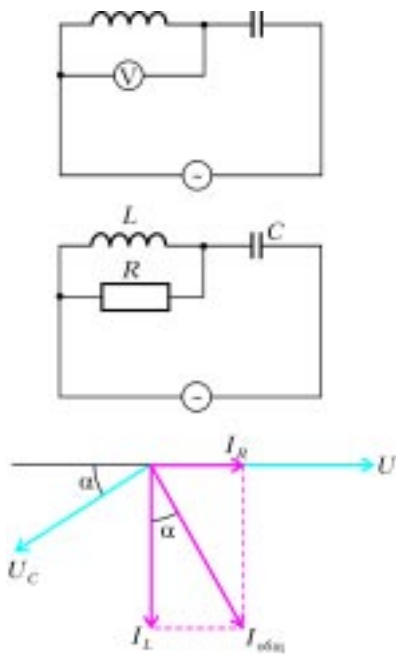
$$t \approx 100 \text{ с}.$$

Примерно так и получается на практике!

С.Фонарев

Ф1967. К звуковому генератору подключают последовательно соединенные конденсатор емкостью $C = 1 \text{ мкФ}$ и катушку индуктивностью $L = 1 \text{ Гн}$. Частоту генератора меняют, измеряя при этом напряжение на катушке вольтметром, имеющим сопротивление $R = 20 \text{ кОм}$. На какой частоте показания вольтметра будут наибольшими? Найдите максимальное напряжение, которое покажет вольтметр. Напряжение генератора все время равно $U_0 = 1 \text{ В}$ (эффективное значение). А что будет, если вольтметр переключить и измерять напряжение на конденсаторе? Катушку и конденсатор считать идеальными, сопротивлением проводов и внутренним сопротивлением генератора пренебречь.

Если бы вольтметр имел очень большое сопротивление, то максимальное напряжение (очень большое!) полу-



чило бы при резонансе на частоте

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 1000 \text{ с}^{-1}$$

– там резко возрастает ток цепи.

Нарисуем векторную диаграмму токов и напряжений цепи (см. рисунок). Сумма напряжений конденсатора и катушки равна напряжению источника U_0 :

$$(U_C \cos \alpha - U)^2 + (U_C \sin \alpha)^2 = U_0^2,$$

$$U_C^2 + U^2 - 2UU_C \cos \alpha = U_0^2,$$

$$\left(\frac{I_{\text{общ}}}{\omega C}\right)^2 + U^2 - 2U \frac{I_{\text{общ}} \cos \alpha}{\omega C} =$$

$$= \frac{U^2/(\omega L)^2 + U^2/R^2}{\omega^2 C^2} + U^2 - 2U^2 \frac{1}{\omega^2 LC} = U_0^2,$$

$$U = \frac{U_0}{\sqrt{\left(\frac{1}{\omega^2 LC} - 1\right)^2 + \frac{1}{\omega^2 R^2 C^2}}}.$$

Применим удобное обозначение

$$LC = \frac{1}{\omega_0^2},$$

тогда

$$U = \frac{U_0}{\sqrt{\left(\frac{\omega_0^2}{\omega^2} - 1\right)^2 + \frac{\omega_0^2 L}{\omega^2 R^2 C}}}.$$

Минимум знаменателя будет при

$$\frac{\omega_0^2}{\omega^2} = 1 - \frac{L}{2R^2 C} = 1 - \frac{1}{800}.$$

В таком случае

$$\omega = 1000,625 \text{ с}^{-1},$$

$$U \approx 20 \text{ В}.$$

Максимальное напряжение, измеренное на конденсаторе, будет таким же, но на частоте чуть меньшей ω_0 .

З. Рафаилов

Карлов университет

(Начало см. на с. 14)

шись, фактически зашло в тупик. Судьи требовали признательного раскаяния, апеллируя к авторитету собора, Гус заявлял о своей невиновности, апеллируя к Библии. Процесс завершился 6 июля 1415 года сожжением реформатора, которое взбудоражило всю Чехию. Вооруженное восстание гуситов, как известно, завершилось их поражением, что привело к закрытию всех, кроме философского, факультетов Пражского университета. Контроль над университетом получили иезуиты, которые в разрушенном доминиканском монастыре на базе часовни Св. Климента основали новое учебное заведение – Климентинум.

В средние века Прага и Карлов университет оказались вытесненными на обочину европейской культуры, а Чехия стала одной из провинций Австро-Венгерской империи. После 1620 года Каролинум стал называться

университетом Карла-Фердинанда. И все-таки это был чешский университет, подтверждавший претензии чехов на культурную самостоятельность. Преподавание в нем велось, однако, на немецком языке. Чешский язык зазвучал в аудиториях лишь в 1882 году, когда Карлов университет был разделен на два – немецкое и чешское – отделения.

В настоящее время Карлов университет пользуется репутацией одного из сильнейших в мире. На его многочисленных факультетах, расположенных не только в Праге, но и в других чешских городах, обучается более сорока тысяч студентов. Структура Карлова университета сложна и охватывает практически все направления современного высшего образования. И по сей день Каролинум занимает одно из старинных готических зданий Праги – Карлов колледж второй половины XIV века. О тех временах напоминает большой зал с эркером бывшей часовни и готические аркады на первом этаже. Во дворе Каролинума установлена скульптура ректора Яна Гуса.

Задачи

1. В одном магазине продавались английские буквы для номеров домов. Одинаковые буквы стоят одинаково, а разные имеют различные цены. Известно, что слово ONE стоит \$6, слово TWO стоит \$9, а слово ELEVEN стоит \$16. Сколько стоит слово TWELVE?
Г.Гальперин



2. В кубической коробке лежат несколько шаров. На каждой k -й грани коробки ($k = 1, 2, \dots, 6$) написано следующее утверждение: «В этой коробке находится больше $10 + k$ шаров» (всего 6 утверждений). Коробку открыли, и шары пересчитали. Оказалось, что число верных утверждений равно числу неверных. Сколько шаров было в коробке?
Г.Гальперин



3. Могут ли высота, медиана и биссектриса, проведенные из разных вершин треугольника, пересекаясь внутри этого треугольника, образовать правильный треугольник?
М.Акуков

Эти задачи предназначены прежде всего учащимся 6 – 8 классов.



4. Можно ли, используя по одному разу каждую из цифр от 1 до 9, составить число, обладающее следующими свойствами:
если вычеркнуть двойку, оно поделится на 2;
если вычеркнуть тройку, оно поделится на 3;
если вычеркнуть четверку, оно поделится на 4;
.....
если вычеркнуть девятку, оно поделится на 9?
А можно ли сделать то же самое, используя каждую из цифр от 0 до 9?
И.Акулич



5. Скупая в отсутствие покупателей, продавец расположил набор из ста гирек массаами 1, 2, 3, ..., 100 граммов в произвольном порядке: $m_1, m_2, m_3, \dots, m_{100}$. Но тут появился покупатель и заявил, что гири массы $|m_1 - 1|, |m_2 - 2|, |m_3 - 3|, \dots, |m_{100} - 100|$ граммов можно расположить на двух чашах весов так, что весы окажутся в равновесии. Продавец не поверил, но покупатель сумел это доказать, не прибегая к взвешиваниям. Докажите и вы.
В.Произволов



Конкурс имени А.П.Савина «Математика 6–8»

Мы продолжаем очередной конкурс по решению математических задач для учащихся 6–8 классов. Решения задач высылайте в течение месяца после получения этого номера журнала по адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант» (с пометкой «Конкурс «Математика 6–8»). Не забудьте указать имя, класс и домашний адрес.

Как и прежде, мы приветствуем участие в конкурсе не только отдельных школьников, но и математических кружков. Руководителей кружков просим указать электронный адрес или контактный телефон. По традиции, кружки-победители заочного конкурса приглашаются на финальный очный турнир.

6. Десять абсолютно одинаковых по внешнему виду монет расположены в узлах пятиконечной звезды.



Известно, что 2 из них фальшивые, причем они соседствуют друг с другом. Соседями считаются монеты, соединенные на рисунке отрезком. Можно ли за 3 взвешивания на чашечных весах без гирь обнаружить местоположение фальшивых монет, если известно, что все настоящие монеты

вешают одинаково, все фальшивые монеты вешают одинаково и вес фальшивой монеты больше веса настоящей монеты?

И. Николаева

7. Натуральные числа A и B таковы, что дроби $\frac{A+2B}{A-2B}$ и $\frac{2A+B}{2A-B}$ сократимы. Можно ли утверждать, что дробь $\frac{A}{B}$ также сократима?

Д. Калинин

8. Луч света, направленный из вершины квадрата, отразившись 2005 раз от его стенок по закону «угол падения равен углу отражения», заканчивает свой путь в другой вершине квадрата. Какое наименьшее расстояние может пройти при этом луч, если длина стороны квадрата равна 1?

А. Ряховский

9. Для каких натуральных n можно выписать в строку слева направо все числа от 1 до n в таком порядке, чтобы каждое число, начиная со второго, было делителем суммы всех чисел, расположенных левее его?

И. Акулич

10. а) Известно, что из комплекта домино (28 костей) можно убрать n костей так, что оставшиеся нельзя будет выложить в один ряд. Известно также, что если из комплекта домино убрать любые $n-1$ костей, то оставшиеся всегда можно будет выложить в один ряд. Определите число n .

б) Из комплекта домино наугад убрали n костей, где число n определено в предыдущем пункте. Оставшиеся кости либо можно выложить в один ряд, либо нельзя. Какой исход имеет больше шансов?

А. Малеев

Об одном математическом случае

С. ДВОРЯНИНОВ

О задаче, решение которой можно увидеть на небе

Сейчас пора перейти к анализу математической модели нашей задачи о лестнице с веревкой.

Уже давно замечено, что универсальная примени-

мость математики к разным областям знаний связана с универсальностью математических моделей. Например, одно и то же уравнение может описывать явления и процессы, протекающие в механических системах, в электрических цепях, в живых организмах, в экономике.

Рассмотрим такую задачу:

Продолжение. Начало см. в «Кванте» №4.

На плоскости расположен белый круг. Из бумаги вырезали синий круг и наложили его на белый круг. Какая часть белого круга останется видимой?

Чертеж к этой задаче (а также и ответ) можно увидеть на ночном небе. Белый круг — это Луна, синий круг, точнее часть синего круга, — это тень на Луне от Земли. Во время полнолуния мы видим лунный круг, при лунном затмении тень от Земли полностью закрывает Луну. В промежуточных положениях мы видим либо растущий лунный серп (молодая Луна), либо уменьшающийся (старая Луна).

Если наш бумажный синий круг мал, то на плоскости можно увидеть белое кольцо (для Земли и Луны это не так!).

Других вариантов нет, какими бы ни были радиусы двух кругов (это, в частности, означает, что никогда не получатся два куса белого круга). Хотя этот факт и очевиден, приведем его математическое доказательство (иногда доказательство именно очевидных фактов и вызывает затруднения). Пусть окружность белого круга задана уравнением

$$x^2 + y^2 = R^2. \quad (1)$$

Центр этого круга находится в начале координат — в точке $O(0; 0)$. Пусть окружность синего круга задана уравнением

$$(x - a)^2 + y^2 = r^2. \quad (2)$$

Сразу скажем, что для дальнейшего нам важен случай

$$-R < a < R,$$

и только его мы будем сейчас рассматривать. При этом точка $K(a, 0)$ — центр синего круга — лежит внутри белого круга на его горизонтальном диаметре.

Изучим точки пересечения двух окружностей. Решая для этого систему из двух уравнений (1) и (2) относительно x и y методом исключения, получим

$$R^2 - x^2 = r^2 - (x - a)^2.$$

Это уравнение относительно x оказывается линейным, и мы можем найти единственное значение абсциссы точек пересечения двух окружностей. При найденном значении x затем придется решать простейшее квадратное уравнение относительно y . А такое уравнение либо не имеет решений (при этом или белый круг полностью закрыт синим, или же мы видим белое кольцо);

либо имеет единственный корень $y = 0$ (это соответствует касанию окружностей);

либо имеет два корня (в этом случае окружности пересекаются ровно в двух точках, и мы видим белый серп; другое название серпа — луночка).

Последний случай для нас самый важный.

При $-R < a < 0$ получается «растущий» белый серп (рис.3). Хорошо известно мнемоническое правило для определения фаз Луны — если к белому серпу пристроить слева вертикальный отрезок, то получится русская буква «Р» — отсюда и *растущий*. При $0 < a < R$ получается «старый» белый серп (рис.4). Здесь белый серп имеет форму русской буквы «С».

Горизонтальный диаметр белого круга обозначен $HВ$, K — центр синего круга, M — одна из двух точек пересечения окружностей. На рисунке 3 точка K лежит на левой половине диаметра $HВ$, на рисунке 4 точка K лежит на правой половине этого диаметра.

Кто-то из читателей подумает: а не слишком ли мы отвлеклись от нашей задачи про лестницу с веревкой? Нет, наоборот. Мы настоятельно рекомендуем внимательно присмотреться к рисункам 3 и 4; использование здесь для обозначений тех же букв, что и на рисунке 1 в первой части статьи, совсем не случайно. Главное в этих рисунках следующее. Возьмем любую новую точку N на дуге MB белой окружности. В случае,

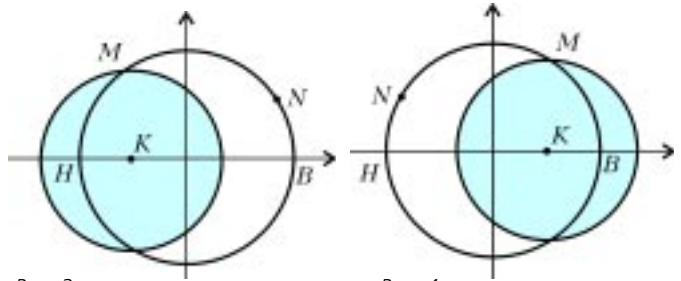


Рис. 3

Рис. 4

представленном на рисунке 3, выполняется неравенство

$$NK > MK, \quad (3)$$

ибо точка N лежит вне синего круга. В случае на рисунке 4, наоборот,

$$NK < MK, \quad (4)$$

ибо точка N лежит внутри синего круга. (Нумерация этих двух неравенств согласована с рисунками 3, 4.)

Так вот, именно эти неравенства и дают ключ к решению нашей задачи.

Решение задачи про лестницу с веревкой

Читатели, надеемся, привыкли к нашим обозначениям: самая верхняя точка лестницы — это B (рис.5), основание лестницы — H (от слов *верх* и *низ*). Пусть точка M — вершина прямого (плоского) угла между землей и стеной, K — точка на лестнице, которая соединена веревкой с точкой M (K — от слов *канат* или *крепление*).

Опишем около прямоугольного треугольника BMH окружность. Круг с центром в точке K и радиусом KM снова назовем синим кругом.

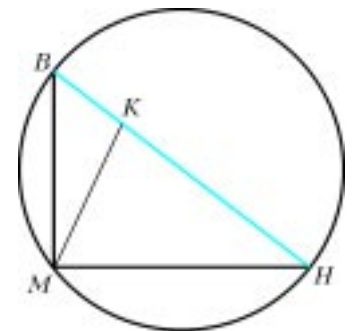


Рис. 5

Скажите, наш внимательный читатель, с каким рисунком — 3 или 4 — по сути дела совпадает рисунок 5? Ответ зависит от того, какое из двух расстояний — $KВ$ или $KН$ — меньше. На рисунке 5 точка K взята на *верхней* половине лестницы. Это соответствует рисунку 4.

Теперь следует установить, что изменится на рисунке 5 при гипотетическом падении лестницы (если это падение возможно!). Самое главное здесь — это уменьшение вертикального отрезка BM (конечно, при этом «поплывет» и окружность, описанная около треугольника $MВH$, — но это неважно). Одновременно и расстояние KM будет уменьшаться (см. рис.4), и веревка этому уменьшению никак не препятствует, т.е. лестница действительно падает даже при наличии веревки.

При этом на рисунке 4 длина отрезка MK будет уменьшаться, что соответствует провисанию веревки, величина угла $MНВ$ будет спадать до нуля, что, в свою очередь, означает скольжение лестницы.

На рисунке 6 точка K взята на нижней половине лестницы. Белый серп в данном случае оказывается растущим (как на рисунке 3). Если допустить, что на рисунке 6 точка M будет перемещаться по дуге MB (что происходит при падении лестницы), то длина отрезка MK (см. рис.3) при этом будет увеличиваться. Но последнее невозможно, ибо веревка нерастяжима. Это и означает, что в этом случае веревка удерживает лестницу, и лестница оказывается неподвижной.

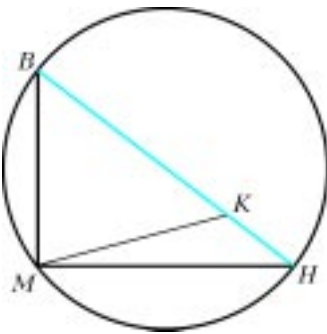


Рис. 6

Итак, ответ на вопрос а) в нашей задаче таков: чтобы не допустить скольжение лестницы, следует с вершиной прямого угла — точкой M — соединить веревкой любую точку K , лежащую на нижней половине лестницы.

Осталось совсем немного — решить задачу на экстремум, т.е. из всех удерживающих лестницу веревок выбрать самую короткую. При этом мгновенно приходит мысль о перпендикуляре, опущенном из точки M на отрезок BH , — основание этого перпендикуляра и есть искомая точка K . Это верно лишь в том случае, если это основание попадает на нижнюю половину лестницы. Легко видеть, что это действительно так при выполнении неравенства $\angle BHM > 45^\circ$, т.е. для достаточно крутой лестницы. Если же $\angle BHM < 45^\circ$, то перпендикуляр здесь не годится, и в качестве точки крепления веревки на лестнице можно взять любую точку K на ее нижней половине. При этом длины всех соответствующих веревок оказываются больше половины длины лестницы. Таким образом, самой короткой веревки, удерживающей лестницу, нет. (Это связано просто-напросто с тем, что на числовом интервале $(a; b)$ нет наименьшего числа.)

Цели мы достигли, еще один математический случай рассмотрели, можно было бы поставить точку в нашем небольшом исследовании. Но точки обычно не бывает. Достигнув какого-либо места, которое нам казалось лежащим на горизонте, мы видим, что горизонт отодвинулся, и впереди опять новое и неизвестное. Так и наша лестница с веревкой дает возможность совсем коротко поговорить о ... катастрофах.

Теория катастроф

Вообразим, что на нашей лестнице в точке H находится... ну, например, небольшой человек, который удерживает в руках, словно вожжи, веревку, идущую в точку M . А можно считать, что лестница ОЧЕНЬ большая, и тогда обычного человека на лестнице можно считать точкой. Пусть угол наклона лестницы к горизонту меньше 45° . Предположим, что этот человек вознамерился сэкономить на длине веревки. Это обычная ситуация: для функционирования какой-либо системы обычно стремятся минимизировать всевозможные затраты (энергии, материалов, денег, времени и т.п.). Чуть-чуть человек поднялся по лестнице вверх, выбирая (вытягивая) веревку на себя, и переместился в точку K . В системе ничего не изменилось, лестница осталась неподвижной, как принято говорить, осталась в стационарном (неизменном) состоянии. Из нового положения человек снова сделал небольшой шаг вверх, по-прежнему выбирая при этом веревку. Все спокойно, все — как прежде. Лестница неподвижна, скольжения и падения лестницы нет. Складывается впечатление, что будто бы от длины веревки ничего не зависит, и можно дальше шаг за шагом подниматься по лестнице вверх и уменьшать длину веревки. Но мы знаем, что, как только человек перейдет с нижней половины лестницы на верхнюю, удержать лестницу от скольжения ему не удастся... В результате в нашей системе произойдут качественные изменения. Неслучайно в подобных случаях говорят о катастрофе.



Состояние системы *лестница + веревка + человек на лестнице* зависит от одного параметра — от расстояния от точки *K* до точки *H*. На отрезке *BH* середина этого отрезка ничем не отличается от всех других точек отрезка, так что при приближении к середине лестницы снизу ничто не предвещает грозящей катастрофы. Однако, как мы видели, при переходе через середину устойчивое стационарное состояние системы исчезает, и система переходит в другое устойчивое состояние, при котором лестница оказывается на земле. В быту в схожих ситуациях говорят о несчастном случае. Разумеется, мы желаем, чтобы у вас подобных случаев никогда не было. Для этого надо внимательно следить за параметрами, которые определяют состояние тех или иных систем или процессов, и не допускать их прибли-

жения к критическим значениям, за которыми — разрушение, непредвиденные последствия и всякие другие неприятности. Так, даже простой воздушный шарик может лопнуть от чрезмерного давления. Другие примеры — время, которое без нежелательных последствий можно провести под жарким июльским солнцем, или количество съеденного мороженого.

Во всякой реальной прикладной задаче все параметры определяются с погрешностью, поэтому даже в нашей задаче приближаться к самой середине лестницы не следует. Всегда нужно оставлять некоторый запас прочности.

Но подробный рассказ о подобных случаях и теории катастроф — это уже совсем другая история.

Победители конкурса имени А.П.Савина «Математика 6–8» 2004/05 учебного года

Лучших результатов в конкурсе добились следующие школьники:

Бажов Иван — Екатеринбург, гимназия 9, 8 кл.,
Бабичев Дмитрий — Долгопрудный, ФМШ 5, 8 кл.,
Медведев Дмитрий — Троицк Московской обл., гимназия, 8 кл.,
Жернов Антон — Харьков, ФМЛ 27, 8 кл.,
Макарец Александр — Харьков, ФМЛ 27, 8 кл.,
Есебуа Вахтанг — Харьков, ФМЛ 27, 8 кл.,
Дудкин Александр — Харьков, ФМЛ 27, 8 кл.,
Соболев Дмитрий — Харьков, гимназия 47, 7 кл.,
Соболев Евгений — Харьков, гимназия 47, 7 кл.,
Гарагатый Игорь — Харьков, ФМЛ 27, 7 кл.,
Лысакевич Анастасия — Харьков, ФМЛ 27, 7 кл.,
Бичурин Игорь — Харьков, УВК 55, 7 кл.,
Тимченко Николай — Харьков, ФМЛ 27, 8 кл.,
Калашник Владислав — Харьков, ФМЛ 27, 7 кл.,
Пазенко Григорий — Харьков, ФМЛ 27, 8 кл.,
Карайко Алина — пгт Солоницевка Харьковской обл., Солоницевский колледжиум, 8 кл.

и кружки:

Математического клуба при Университете им. Бен-Гуриона в Негеве, Беер-Шева, Израиль, руководители *П.Самовол, Й.Хейфец*, гимназии 127, Снежинск, руководитель *А.А.Малеев*, «Эврика» ФМЛ 27, Харьков, руководители *Е.Л.Аринкина, А.Л.Берштейн, В.Я.Крупчицкий*, лицей 64, Омск, руководитель *Ю.Е.Рязанова*, Малого Университета при Харьковском национальном университете им.В.Н.Каразина, Харьков, руководители *С.А.Лифиц, А.С.Щербина*, гимназии, Шелехов, руководитель *А.А.Кошкин*, «Эрудит» Донецкого областного лицея, Донецк, руководители *В.Л.Потемкин, Л.Л.Потемкина*, Муниципального лицея 90, Краснодар, руководитель *З.А.Дегтярева*, ШИООД, Магнитогорск, руководитель *А.В.Христева*, гимназии 1, Самара, руководитель *А.А.Гусев*,

«Сигнум» Чувашского национального центра образования, Чебоксары, руководитель *С.А.Иванов*, «Эрудит» ФМШ 32, Астрахань, руководитель *Т.М.Сергеева*, ФМШ 9, Пермь, руководитель *Г.А.Одинцова*, лицей 130, Новосибирск, руководитель *Л.Н.Чусовитина*.

Жюри конкурса отмечает также хорошие работы следующих учеников:

Пазенко Ольги — Харьков, ФМЛ 27, 6 кл.,
Лисичкина Владислава — Харьков, гимназия 47, 7 кл.,
Захожей Любове — Харьков, ФМЛ 27, 7 кл.,
Грызун Екатерины — Харьков, ФМЛ 27, 7 кл.,
Коржова Игоря — Харьков, УВК 55, 7 кл.,
Кравченко Александра — Харьков, ФМЛ 27, 6 кл.,
Андреева Кирилла — Харьков, ФМЛ 27, 8 кл.,
Ибрагимовой Айжаны — Бишкек, ФМШЛ 61,
Балакшина Александра — Харьков, УВК 141, 6 кл.,
Клевцова Юрия — Харьков, ФМЛ 27, 7 кл.,
Заплетина Андрея — Москва, 7 кл.,
Турбиной Натальи — Ангарск, школа 10, 7 кл.,
Ибрагимова Бексултана — Бишкек, ФМШЛ 61,
Дудкина Алексея — Харьков, УВК 45 «Академическая гимназия», 6 кл.,
Лавинской Татьяны — Харьков, ФМЛ 27, 6 кл.,
Томаша Надя — Мишкольц, Венгрия, гимназия им.Отто Хермана, 6 кл.

и кружков:

МОУ СОШ 10, Ангарск, руководитель *Л.В.Шварева*, Агапатовской средней школы, д.Вартемяги Всевожского района Ленинградской обл., руководитель *Н.А.Петровская*, школы 117, Омск, руководитель *И.А.Чернявская*, «Таланты среди нас», ФМШЛ 61, Бишкек, руководитель *Л.С.Хохлова*, лицей авиационного профиля, Самара, руководитель *Т.Б.Лаврова*.

Ворона — хвостом вперед?

В. КОЗЛОВ

ВОЗМОЖНО, ПРОЕЗЖАЯ В ОКРЕСТНОСТЯХ КАКОГО-ЛИБО аэродрома (аэропорта) на электричке, поезде или автомобиле, вам приходилось наблюдать из окна удивительное зрелище. Самолет, взлетающий вдалеке или идущий на посадку почти параллельно дороге, как будто замирает в воздухе или даже начинает двигаться... хвостом вперед. (Здесь, конечно, речь не идет о самолетах вертикального взлета и посадки, для которых такое движение реально возможно.) Подобным же образом иногда выглядит из окна движущегося транспорта и полет птичьих стай или одиночных крупных птиц.

Попытаемся разобраться в причинах, вызывающих у наблюдателя такую иллюзию. Вы, наверное, припоминаете (если, конечно, наблюдали такой эффект), что во всех упомянутых выше случаях на переднем плане всегда находи-



лись какие-то крупные объекты: большие здания, деревья, кусты и т.п., а самолет или птицы летели далеко за ними, на заднем плане. И это — ключ для объяснения эффекта.

Однако сначала рассмотрим более простую ситуацию. Предположим, что движения лыжника, вороны и реактивного самолета происходят в одной и той же вертикальной плоскости с постоянными скоростями. Высоты полета вороны и самолета также не изменяются. Пусть в некоторый момент времени t_0 , как условно показано на рисунке 1,

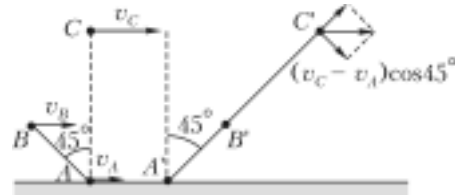


Рис. 1

самолет (точка C) находится в зените относительно лыжника (точка A), а угол между направлениями на самолет и на ворону (точка B) равен 45° , причем ворона летит позади лыжника. Спустя некоторое время Δt лыжник, ворона и самолет (соответственно, точки A' , B' и C') оказываются на одной прямой, образующей с вертикалью угол 45° . А это означает, что скорость углового перемещения по небосводу относительно лыжника у вороны больше, чем у самолета.

Определим отношение мгновенных угловых скоростей вороны и самолета относительно лыжника для этого момента времени. Мгновенная угловая скорость равна проекции относительной скорости вороны $\vec{v}_B - \vec{v}_A$ или самолета $\vec{v}_C - \vec{v}_A$ на нормаль к радиусу-вектору соответствующей точки, деленной на длину этого радиуса-вектора:

$$\omega_B = \frac{(v_B - v_A) \cos 45^\circ}{A'B'} = \frac{(v_B - v_A) \cos^2 45^\circ}{h_B},$$

$$\omega_C = \frac{(v_C - v_A) \cos 45^\circ}{A'C'} = \frac{(v_C - v_A) \cos^2 45^\circ}{h_C},$$

где v_A — скорость лыжника, h_B и h_C — высоты полета вороны и самолета соответственно. По условию рассматриваемой задачи,

$$h_B = \frac{(v_B - v_A) \Delta t}{2 \operatorname{tg} 45^\circ}, \quad h_C = \frac{(v_C - v_A) \Delta t}{\operatorname{tg} 45^\circ}.$$

Используем это для вычисления отношения угловых скоростей и получим

$$\frac{\omega_B}{\omega_C} = 2.$$

Таким образом, несмотря на то что характерная скорость вороны значительно меньше скорости реактивного самолета, ее скорость углового перемещения по небосводу, с точки зрения движущегося лыжника, в конкретной ситуации оказалась в 2 раза больше соответствующей угловой скорости самолета. И у бегущего лыжника создается впечатление, что ворона перемещается по небосводу быстрее самолета. Причина этого — в существенной разнице в высотах полета птицы и самолета. Читатель может задаться типичными значениями скоростей лыжника, вороны и самолета и самостоятельно оценить наблюдаемый эффект.

Вернемся теперь к проблеме «зависающего или движущегося хвостом вперед» самолета. Действие, конечно, происходит в трехмерном пространстве. Однако для простоты можем предположить, что векторы скоростей самолета и наблюдателя параллельны друг другу и направлены в разные сторо-

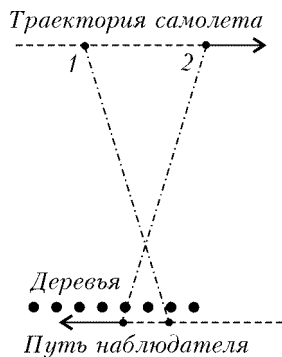


Рис. 2

домов и т.п.), могут значительно превышать скорость углового перемещения самолета относительно движущегося наблюдателя.

Рисунок 2 схематично поясняет, как возникает иллюзия «летающего хвостом вперед» самолета. Движущийся (например, в автомобиле) наблюдатель сначала увидит самолет (точка 1) перед ближним к нему объектом (деревом). Затем самолет может быть закрыт на короткое время от наблюдателя этим объектом. По истечении еще некоторого времени наблюдатель снова увидит самолет (точка 2), но с другой

стороны от находящегося перед наблюдателем объекта (дерева). Заведомо зная, что дома, деревья и т.п. неподвижны, наблюдатель воспринимает видимые изменения положения самолета относительно таких объектов как его движение «хвостом вперед». Этому может также благоприятствовать значительная удаленность самолета от наблюдателя. В этом случае направление на самолет с течением времени изменяется очень мало, а расположенные вблизи дороги крупные объекты «проносятся» за окном движущегося транспорта с относительно большой угловой скоростью.

Однако воспринимаемый человеком любой зрительный образ не является вполне объективным отражением реальной действительности. Дело в том, что в формировании воспринимаемого образа активно участвует мозг. Он «управляет» поступающую к нему зрительную информацию за счет известных фактов. В частности, из повседневного опыта человеку известно, что дома, деревья или кусты не могут перемещаться по неподвижной поверхности земли. Поэтому при наблюдении за летящим вдаль самолетом наш мозг, обрабатывая поступающую зрительную информацию, «автоматически» оценивает перемещения самолета относительно заведомо для него неподвижных на переднем плане объектов. И тогда, вследствие объективно меньшей относительной угловой скорости, возникает иллюзия зависающего в воздухе или летящего назад («хвостом вперед») самолета.

кам, отсюда — гривенник), пядь (расстояние между концами растянутых большого и указательного пальцев, равно 17,78 см) и др.

Тогда же был установлен и межповерочный интервал. Так, в грамоте князя Всеволода (XII в.) написано: «...торговая вся весы мерила и скалвы вощаные и пуд медовый и гривенка рублевка иже на торгу промеж людьми блюсти без пакости ни умалчивать ни умножати и на всякий год взвешивати...» (Надо полагать, скалвы — это единица меры воска, пуд — меда, а гривенка рублевка — денежная единица.) В той же грамоте указывались и санкции для нарушителей единства измерений: «...а скривится а кому приказано и того казнити близко смерти а живот его на трое...». В общем, плохо будет нарушителю.

Дальнейшее развитие законодательная метрология получила при Петре I. В одном из его указов написано: «По указу великого государя велено чтоб у торговых и мастеровых людей были весы и фунты у всех правдивые и заклеямены годовым клеймом...»

Однако в научных исследованиях роль единства измерений была осознана относительно поздно, лишь в XVIII веке, когда М.В. Ломоносов впервые ввел научные понятия меры и веса. Дальнейшее развитие метрологии как прикладной науки обеспечил во второй половине XIX века Д.И. Менделеев. Уместно привести высказывание знаменитого физика конца XIX века У. Томсона (лорда Кельвина): «Каждая величина известна лишь в той мере, в которой ее можно измерить».

Поговорим об измерениях в естественных науках на примере физики. Измерение — неотъемлемый атрибут физики. Как наука в нынешнем ее понимании, она стала оформляться в XVII веке (галилеево-ньютоновы времена). В то время она имела название «натуральная философия».

Чтобы начать изучать что-нибудь, необходимо это «что-нибудь» определить. Раз речь идет об окружающем мире, значит, это «что-нибудь» надо сначала увидеть, т.е. выделить из окружения (фона), установить различие между

От пяди до Вселенной

С. ИНШАКОВ

ЧЕЛОВЕЧЕСТВО ИЗДАВНА ПОЛЬЗОВАЛОСЬ В СВОЕЙ практике измерениями. Вначале это были измерения, связанные с торгово-экономической деятельностью. Первое известное упоминание о точности и достоверности измерений встречается в Библии. Так, в одной из книг Пятикнижия сказано: «Не делайте неправды в суде, в мере, в весе и в измерении... Да будут у вас весы верные, гири верные, ефа верная...» (Ефа — мера объема для сыпучих веществ, равная 52,48 литра.) А в другой книге устанавливается основная обязанность инспектора по обеспечению единства измерений: «В кисе твоей не должны быть двоякие гири, большие и меньшие... В доме твоём не должна быть двоякая ефа, большая и меньшая.. Гиря у тебя должна быть точная и правильная, и ефа у тебя должна быть точная и правильная, чтобы продлились дни твои на земле...» (Киса — это сумка. В современном русском языке сохранилось однокоренное слово — кисет, обозначающее мешочек для махорки.)

В Древней Руси меры появились тоже очень давно, однако раздробленность княжеств привела к тому, что меры длины, веса и объема по своему номинальному значению у разных князей различались в 1,5 — 2 раза. Единообразные меры возникли на Руси лишь с объединением княжеств в одно государство. Это — золотник (в последнем варианте 4,266 г), сажень (2,134 м), гривна (сначала денежная и весовая единица, затем счетно-денежная, равная 10 копей-

этим «что-нибудь» и фоном. Назовем это действие выявлением. Выявим сначала одно «что-нибудь», потом – другое «что-то». Теперь возникает проблема сравнения. Это сравнение можно проводить только по общему признаку. В самом деле, бесполезно, например, сравнивать звук, с которым первое «что-нибудь» падает на пол, и цвет поверхности второго «чего-то». (Для этого случая существует поговорка: «В огороде бузина, а в Киеве дядька».) Заметим при этом, что как общее (сравнение), так и различное (выявление) взаимосвязаны, они выступают в диалектическом единстве.

Пример 1. Рассмотрим арбуз и яблоко. Различить их можно по целому ряду признаков: цвету, запаху, вкусу, способности поглощать радиацию и т.д. Различили. Теперь будем сравнивать. Сравнить надо по общему признаку. Возьмем в этом качестве объем. Его определим так: это воздух, который вытесняется тем или иным объектом из сосуда. Вот так от сравнения объемов разных тел перешли к сравнению одного и того же – воздуха. Введем теперь определение отношения «больше – меньше». Ясно, что из воздуха, вытесненного арбузом, можно сделать столько же воздуха, сколько вытеснило яблоко, а наоборот – нельзя. Это означает, что воздуха, вытесненного арбузом, больше, чем воздуха, вытесненного яблоком, т.е. объем арбуза больше объема яблока. Мы определили *качественное* отношение «больше – меньше».

Теперь определим *количественное* отношение, оно будет характеризоваться *числом*. Вот здесь и необходима процедура измерения. Сначала используем уже введенное качественное отношение. Рассмотрим такое общее свойство тел, как протяженность. Для простоты будем сравнивать протяженность в одном направлении и назовем тела, протяженности которых сравниваем, линейками. Методика сравнения такова: прикладываем линейки так, чтобы одни концы линеек находились напротив друг друга, и наблюдаем за оставшимися концами. Если они совпали, то линейки считаем равными. Если нет, то меньшей назовем ту, чей конец лежит напротив внутренней стороны другой линейки. Пока ничего нового – это качественное отношение, примененное не к объемам тел, как в примере 1, а к их протяженностям.

Сформулируем определение: *измерением физических свойств называется процедура соотнесения этим свойствам некоторых чисел таким образом, чтобы сравнение свойств можно было теперь заменить сравнением этих чисел.*

Другими словами, устанавливается взаимно однозначное соответствие между числами и свойствами. Математика здесь присутствует в механизме этого соотнесения.

Итак, если исследуемое свойство характеризуется взаимно однозначным соответствием с числом, то оно называется физической величиной. Процедура нахождения этого числа и есть измерение.

Пример 2. Берем одну линейку и принимаем ее длину за единицу измерения. Длинам всех других линеек приписываем числа, равные количеству этих единичных линеек, укладываемых на измеряемой протяженности. Выразим эту процедуру математически. Длина некоторой линейки выражается так: $L = nL_0$, где n – безразмерное число, а L_0 – единица измерения. Если теперь у нас две линейки, причем $L_1 = n_1L_0$ и $L_2 = n_2L_0$, и надо найти их суммарную длину (в безразмерных числах), то

$$L_{1+2} = L_1 + L_2 = n_1L_0 + n_2L_0 = (n_1 + n_2)L_0.$$

Таким образом, при равномерном разбиении сумма длин линеек равна сумме безразмерных чисел, которые характеризуют длину каждой из них.

Пример 3. Выберем другой способ разбиения. Возьмем равномерно размеченную линейку и пронумеруем ее по следующему закону: начало – числом 1, первое деление – числом 2, второе – числом 4, ..., n -е деление – числом 2^n . Это означает, что длина делений обозначена безразмерным числом по закону $P = 2^n$. Пусть есть две линейки – длиной P_1 и P_2 . Найдем длину линейки, которая получается при сложении этих двух (в безразмерных единицах P). Теперь закон разбиения линеек неравномерный: 2^N , где N – число делений. Но разметка делениями равномерная, поэтому $N = n_1 + n_2$. В единицах P получаем

$$P_{1+2} = 2^N = 2^{n_1+n_2} = 2^{n_1} \cdot 2^{n_2} = P_1P_2,$$

т.е.

$$P = P_1P_2.$$

Иными словами, в таких единицах и при таком законе нумерации делений длина суммы двух линеек равна произведению их длин. (Заметим, что именно так работала логарифмическая линейка – аналоговый калькулятор, широко использовавшийся вплоть до начала 80-х годов прошлого века. Единственное отличие в том, что для удобства пользования на шкале логарифмической линейки деления нумеровались с помощью натурального ряда чисел (1, 2, 3, ...), а длина делений была неравномерной.)

Теперь поговорим более подробно об измерениях расстояний, а именно – больших расстояний: от одного метра до размера Вселенной.

Учитывая наши собственные размеры, измерять расстояния путем непосредственного прикладывания эталонных линеек реально лишь при длине этих эталонов порядка одного метра. На больших расстояниях используется геометрия. В 1821–1823 годах этим занимался К.Гаусс. Он измерил углы между вершинами гор Брокен, Хохехаген и Инзельберг (Германия), учел поправку на сферичность (наибольшее расстояние между вершинами было около 100 км, при этом на каждой из вершин угломерные геодезические приборы устанавливались по местной плоскости горизонта и эти плоскости не были параллельными). В результате он получил, что измеренная сумма внутренних углов треугольника отличается от 180° на 0,680 дуговой секунды. Гаусс считал, что эта величина находится в пределах ошибок измерений, поэтому пространство является евклидовым (в пределах точности этих измерений). Таким образом, мы можем пользоваться хорошо разработанным математическим аппаратом евклидовой геометрии.

На практике эта задача решается с помощью топографической съемки земной поверхности. На поверхности Земли строго определяется положение ряда пунктов – как в плане, так и по высоте. Положение нескольких пунктов (геодезической основы) определяется по астрономическим измерениям: широта находится по наблюдению небесных светил, а долгота – по сравнению местного времени в двух точках в один и тот же момент. Эти пункты считаются исходными, с ними геодезическими измерениями связаны все остальные. Так образуется геодезическая сеть, покрывающая поверхность Земли. Линии, соединяющие отдельные пункты, могут образовывать треугольники или многоугольники. Длина сторон этих геометрических фигур порядка 25 км. Поскольку такие расстояния трудно измерить непосредственно при обычной прозрачности атмосферы, берут базис длиной порядка 10 км, который служит основой для построения базисной сети. Она, в свою очередь, является основой для вычисления по тригонометрическим формулам длин сторон всех треугольников геодезической сети. Наиболее точные современные измерения базиса длиной 10 км произ-

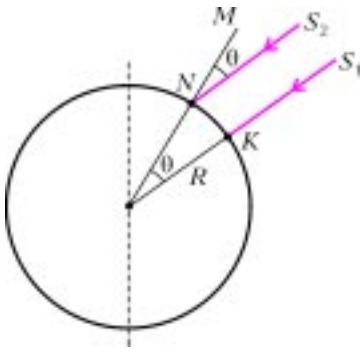


Рис. 1

одном меридиане. Для более южного наблюдателя звезда в зените находится на луче KS_1 , для северного наблюдателя ее положение будет отличаться от местного зенита NM на угол θ (рис.1). Таким образом можно вычислить радиус земного шара R , зная расстояние между двумя точками N и K , находящимися на одном меридиане, и разность их географических широт.

Пример 4. Определим радиус земного шара по географической широте конкретных пунктов. Возьмем на карте Подмосковья на одном и том же меридиане два пункта – Большой Москворецкий мост, его широта $55^\circ 45' 00''$, и мост через реку Упу в Туле, его широта $54^\circ 11' 44''$. Расстояние между этими пунктами – 174 км вдоль меридиана. Используя связь между углом, образуемым радиусами окружности, и длиной дуги между ними, получаем $R = NK/\theta = 6391$ км (естественно, угол надо брать в радианной мере). Реально радиус Земли равен 6378 км, отличие связано с тем, что Земля не совсем шар.

Расстояния в пределах Солнечной системы можно вычислять по известным периодам обращения планет и третьему закону Кеплера. Но так могут быть определены лишь относительные расстояния. Абсолютные же расстояния в пределах Солнечной системы находятся с помощью измерений горизонтальных параллаксов небесных светил. Параллакс – это угол, на который сместится объект наблюдения при перемещении наблюдателя на некоторое базовое расстояние. Для астрономических объектов базовое расстояние должно быть достаточно большим, в противном случае будет, как в стихотворении Пушкина, посвященном А.П.Керн: «Я ехал к вам: живые сны/ За мной вились толпой игривой/ И месяц с правой стороны/ Сопровождал мой бег ретивый...» Другими словами, угловое смещение месяца при движении Александра Сергеевича в течение нескольких часов было совершенно незаметно, особенно по сравнению с громадным угловым смещением элементов пейзажа.

Оценим смещение Луны относительно звезд. Напомним, что суточное вращение Земли приводит к угловому перемещению небесной сферы со скоростью $15^\circ/\text{ч}$. Будем считать, что скорость повозки была около $15 \text{ км}/\text{ч}$, время поездки к Керн – не более 4 ч, тогда базовое расстояние получается порядка 60 км. Расстояние от Земли до Луны, как теперь известно, равно 384400 км, и угловое смещение Луны относительно звезд (без учета собственного движения Луны вокруг Земли) будет составлять $0,56''$ (или 78 микроардиан), что на глаз абсолютно незаметно. Учтем собственное движение Луны вокруг Земли. Оно происходит с угловой скоростью $0,5^\circ/\text{ч}$, поэтому за 4 ч Луна сместится на 2° – на глаз тоже совсем незаметно. Поэтому для определения параллакса желательны одновременные измерения из двух мест с максимально возможной базовой. (Можно, конечно, проводить и не одновременные измерения, но тогда необхо-

димо учитывать изменение положения светила за время между измерениями.)

На земле максимально возможная база – диаметр земного шара, вот почему традиционно за эталонную базу принимают земной радиус. Угол p между направлениями, по которым светило M было бы видно из центра Земли и из какой-нибудь точки на ее поверхности, называется суточным параллаксом светила. Иными словами, суточный параллакс есть угол, под которым со светила был бы виден радиус Земли, проведенный из центра Земли на ее поверхность (в исходную точку наблюдения). Если светило наблюдается на горизонте, то суточный параллакс максимален. В этом случае он называется горизонтальным параллаксом. Так как Земля имеет форму не сферы, а сфероида, то горизонтальные параллаксы вычисляются для одного конкретного радиуса. Это – экваториальный радиус Земли $R_0 = 6378$ км, а горизонтальные параллаксы, вычисленные для него, называются горизонтальными экваториальными параллаксами p_0 . (Естественно, нет необходимости проводить астрономические наблюдения непосредственно на экваторе. Так как географические координаты обсерваторий известны, то результаты измерений, выполненных там, можно пересчитать на любую точку земной поверхности.) Именно эти параллаксы тел Солнечной системы и приводятся в справочниках. Горизонтальный параллакс у всех тел Солнечной системы весьма невелик – у Луны он равен $57'$, у Солнца – $8,79''$, у большинства планет – меньше $1'$.

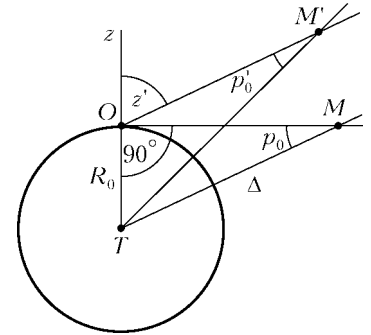


Рис. 2

Зная горизонтальный экваториальный параллакс светила, легко определить его расстояние до центра Земли (рис.2). Из прямоугольного треугольника TOM имеем $\Delta = R_0/\sin p_0$. Для всех светил, кроме Луны, параллаксы очень малы, поэтому данную формулу можно написать иначе: положив $\sin p_0 = p_0'' \sin 1'' = p_0''/206265$, получим

$$\Delta = \frac{206265 R_0}{p_0''}$$

Расстояние Δ получается в тех же единицах, что и радиус Земли R_0 , число 206265 является обратной величиной синуса одной дуговой секунды, а горизонтальный экваториальный параллакс берется в дуговых секундах. Наибольшее расстояние, которое наблюдается между Землей и самым дальним объектом Солнечной системы, равно 6055959000 км ($p_0 = 0,22''$). Это расстояние свет проходит за 5 часов 36 минут.

Появление и развитие радиолокации в середине XX века позволило непосредственно определить расстояния до ряда планет (вплоть

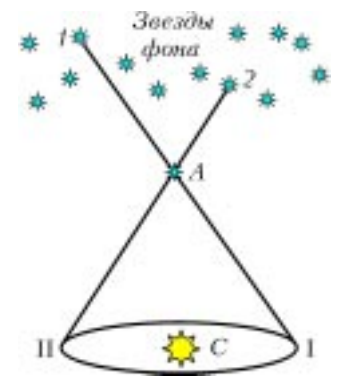


Рис. 3

(Продолжение см. на с. 34)

Необходимо признать, что существуют два вида тепла, одно светящееся, ... другое темное.

Жорж Бюффон

Тепло, которое излучается поверхностью всех тел..., подчиняется специальным законам и вызывает самые различные явления.

Жан Фурье

...моя формула излучения до сих пор удовлетворительно

оправдывалась даже при очень точных систематических измерениях.

Макс Планк

...опыты, касающиеся «излучения черного тела», фотолюминесценции, возникновения катодных лучей, ... лучше объясняются предположением, что энергия света распределяется по пространству дискретно.

Альберт Эйнштейн

А так ли хорошо знакомо вам излучение?

Собственно, говоря об излучении, мы должны были бы перечислить столько его видов, что не хватило бы и целого выпуска нашей рубрики. Ведь излучение включает световые волны и вылетающие из атомного ядра фрагменты, тормозное излучение заряженных частиц и космические лучи, один из видов теплопередачи и перенос информации с помощью теле- и радиоантенн... Если объединить все одним определением, то излучение — это распространение энергии в форме волн и частиц. Необъятная тема!

Однако в истории исследований разного рода излучений четко просматривается один «драматичный» сюжет. К концу XIX века в фундаменте крепко выстроенного величественного здания классической физики возникла небольшая вроде бы трещинка, и ее появление было связано с особенностями теплового излучения. Попытки найти им объяснение в рамках сложившихся представлений приводили к невероятным результатам — так называемой ультрафиолетовой катастрофе, когда любое тело из-за теплового излучения должно было остывать до абсолютного нуля! И лишь введение в физику совершенно непривычного, чуждого ей понятия кванта позволило найти выход из сложной ситуации. Вместе с тем, это понятие дало начало новому витку прогресса науки, беспрецедентный вклад в который внесла квантовая механика.

Нынешний, 2005 год объявлен «Всемирным годом физики» — в ознаменование столетия выхода в свет революционных эйнштейновских работ, одна из которых развивала идеи квантовой теории. В меру наших скромных сил, этим выпуском «Калейдоскопа» мы тоже хотим отметить сей славный юбилей.

Вопросы и задачи

1. Когда чайник излучает больше: когда в нем кипит или когда в нем вода комнатной температуры?
2. Какой объект чернее всего?
3. Почему зрачок кажется черным?
4. Внутри замкнутой оболочки, поддерживаемой при постоянной температуре, помещают несколько тел, одно из них с абсолютно зеркальной поверхностью. Установится ли в такой системе тепловое равновесие?

5. Солнечные лучи с помощью вогнутого зеркала направляются через маленькое отверстие в замкнутую полость, стенки которой не проводят тепло. Можно ли, увеличивая размеры зеркала, неограниченно повышать температуру внутри полости?

6. От чего зависит показание термометра, прикрепленного снаружи к спутнику с его теневой стороны?

7. Казалось бы, одежда металлургов, пожарных и спасателей должна обладать низкой теплопроводностью, чтобы не пропускать внутрь обжигающий жар. Однако их костюмы снаружи покрывают тонким слоем металлической фольги — прекрасного проводника тепла. Для чего?

8. Почему мел среди раскаленных углей выглядит темным?

9. Картофель собираются запечь в фольге, одна сторона которой матовая, а другая блестящая. Какая сторона должна быть снаружи?

10. Если черный предмет поглощает падающие на него видимые лучи, то почему он виден?

11. Может ли золото иметь цвет серебра?

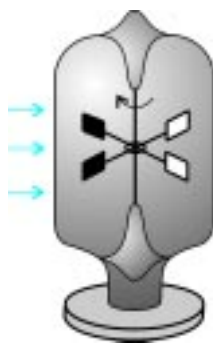
12. Одни звезды кажутся белыми, другие — красными, третьи — голубыми. А почему не бывает зеленых звезд?

13. Монохроматический свет какого цвета — красного или фиолетового — оказывает при одинаковой интенсивности потока фотонов большее давление на поверхность тела?

14. Лазерный луч красного цвета направляют поочередно на красное и зеленое стекла. Какое стекло будет испытывать большее давление? А если вместо стекол взять красную и зеленую бумагу?

15. Почему на снимках, сделанных в инфракрасных лучах, зеленая растительность кажется белой?

16. В стеклянный сосуд, из которого частично откачали воздух, помещена легкая крестовина с четырьмя лепестками, свободно вращающаяся вокруг вертикальной оси. Поверхность каждого лепестка с одной стороны зеркальная, с другой — зачерненная, как показано на рисунке. В ярко освещенном помещении крестовина начинает вращаться по часовой стрелке. Объясняется ли этот опыт световым давлением?



17. Может ли какое-нибудь тело покоиться в поле тяготения Солнца?

18. Свет падает на плоскую пластинку под некоторым углом. В каком направлении будет отталкиваться пластинка, если ее поверхность: а) поглощает весь свет; б) зеркально отражает свет?

19. Как будет ориентироваться относительно Солнца спутник сферической формы, одна сторона которого зеркальная, а другая покрыта черными термобатареями?

Снимите с двух одинаковых пустых консервных банок наклейки. Закоптив или закрасив черной краской одну банку, другую оставьте светлой. Налейте в обе банки горячую воду и посмотрите, в какой из них вода остынет быстрее (опыт можно проводить и в темноте).

Микроопыт

Любопытно, что...

...связь между световыми и тепловыми лучами была известна со времен античности. Более того, слово «фокус» означает на латинском языке «огонь», «очаг», что в применении к вогнутым зеркалам и линзам свидетельствует о первоочередном внимании к концентрации тепловых, а не световых лучей. Среди многих экспериментов XVI–XVIII веков особо выделяется опыт, проведенный Эдмом Мариоттом, в котором порох воспламенялся тепловыми лучами, отраженными вогнутым зеркалом, изготовленным из... льда.

...Уильям Гершель, знаменитый открытием планеты Уран, обнаружив в спектре Солнца невидимые – инфракрасные – лучи, был так поражен, что двадцать лет хранил об этом опыте молчание. А вот в том, что Марс обитаем и населен людьми, он не сомневался...

...еще в 1830 году итальянский физик Леопольдо Нобили сумел создать термомультипликатор, реагирующий на тепловое излучение человека, находящегося от него в десяти метрах. В дальнейшем термомепленгация развилась настолько, что с помощью чувствительных полупроводниковых приборов – болометров – стало возможным уловить тепло от зажженной спички на расстоянии в несколько километров. С другой стороны, и сверхвысокие температуры в десятки миллионов градусов, характерные для термоядерных установок, измеряют также по тепловому излучению.

...модель абсолютно черного тела предложил в 1860 году Густав Кирхгоф. К тепловому излучению такого тела близко по спектральному составу Солнце. А из «земных» материалов больше всего соответствуют ему платина и плавный оксид тория при температуре затвердевания платины.

...профессор Принстонского университета Эрик Роджерс, написавший изданную во многих странах «Фи-

зику для любознательных», дал своеобразное «описание» абсолютно черного тела: «никакая черная краска на собачьей конуре не выглядит чернее открытой для собаки дверцы».

...в своей диссертации, представленной в 1893 году, русский физик Борис Голицын впервые ввел понятие температуры теплового излучения и предвосхитил многие выводы будущей квантовой теории. Но резкий отзыв оппонентов, среди которых был открывший законы фотоэффекта Столетов, заставили Голицына отказаться от продолжения этой работы.

...автора закона теплового излучения Густав Кирхгофа, начавшего глубокий пересмотр основ классической физики, сменил на кафедре Берлинского университета Макс Планк, введший в науку неклассическое понятие кванта действия. В свою очередь, через сорок лет Планк передал кафедру Эрвину Шредингеру – одному из создателей новой, квантовой, механики.

...многие годы после опубликования основополагающей работы Эйнштейна по фотоэффекту его теория квантов света по иронии истории не находила понимания у самого «отца кванта» Планка и подвергалась критике, в том числе и на таком представительном собрании физиков, как Сольвеевский конгресс. Несколькими десятилетиями позже академик Сергей Вавилов пришел к выводу, что его опыты опровергают квантовую теорию, правда вскоре он преодолел заблуждения и разработал способ непосредственного зрительного наблюдения отдельных квантов света.

.....так называемые черные дыры – космические объекты, обладающие столь большим притяжением, что даже кванты света не могут их покинуть, – тем не менее, способны излучать. Дело в том, что в окрестностях черной дыры под воздействием колоссального тяготения происходит рождение реальных частиц, в том числе фотонов, из ...вакуума. Причем спектр возникающего излучения, как установил знаменитый английский физик-теоретик Стивен Хокинг, оказывается в точности таким же, как и спектр абсолютно черного тела.

Что читать в «Кванте» об излучении

(публикации последних лет)

1. «Лазерная указка» – 2000, №3, с.18;
2. «Волновая механика Эрвина Шредингера» – 2000, №3, с.23;
3. «Хочешь общаться – излучай» – 2000, №5, с.37;
4. «Как линейкой измерить длину волны лазерного излучения» – 2000, №6, с.31;
5. «Альберт Эйнштейн» – 2001, №1, с.11;
6. «Лебедевские крылышки» – 2001, №2, с.11;
7. «Радиоволны на земле и в космосе» – 2002, №1, с.2;
8. «Под давлением лунного света» – 2002, №4, с.40;
9. «Небо синее, Солнце красное» – 2003, №1, с.37;
10. «Калейдоскоп «Кванта» – 2004, №3, с.32;
11. «Из глубин Вселенной» – 2004, Приложение №4, с.122.

Материал подготовил
А.Леонович

(Начало см. на с. 29)

до Юпитера). Они оказались именно теми, что были вычислены по горизонтальным экваториальным параллаксам.

Расстояния от Солнца до ближайших звезд определяются с помощью годовых параллаксов. Принцип тот же, что и

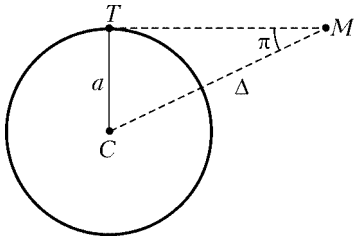


Рис. 4

для суточных горизонтальных параллаксов, но база гораздо больше (рис.3). При этом рассматривается угловое смещение звезды относительно более удаленных звезд с полугодовым интервалом между измерениями, когда Земля переместится на расстояние диаметра своей орбиты. Угол, под которым был бы виден средний радиус земной орбиты при условии, что направление на звезду перпендикулярно радиусу, называется годовым параллаксом звезды и обозначается π (рис.4). Формула аналогична предыдущей, только в качестве базы теперь взят средний радиус земной орбиты $a = 149600000$ км:

$$\Delta = \frac{206265a}{\pi''}$$

Смещения эти совсем невелики. Так, ближайшая к нам звезда Проксима (в переводе с греческого – ближайшая) из созвездия Центавра имеет годичный параллакс $\pi = 0,762''$. В результате наблюдений с Земли были измерены годовые параллаксы более 16000 звезд.

Наилучшие современные определения годовых параллаксов выполняются с космических аппаратов. Еще в 1966 году французский астроном П.Лакурт предложил использовать спутник для проведения массовых астрономических наблюдений. В 1975 году был создан и одобрен Европейским космическим агентством проект «Гипшаркос» – в переводе «спутник для сбора высокоточных параллаксов». Летом 1989 года космический аппарат был выведен на орбиту, и через несколько месяцев начались систематические наблюдения. В программу наблюдений было включено около 100 тысяч звезд, каждая из них наблюдалась 60–80 раз при точности единичного наблюдения $0,01''$, что в результате дало точность около $0,001 - 0,002''$.

В астрономии, помимо километров, приняты следующие единицы расстояний:

астрономическая единица (а.е.) – среднее расстояние от Земли до Солнца (равное 149600000 км);

парсек (пк), сокращенно от «параллакс» и «секунда» – расстояние, соответствующее годовому параллаксу в $1''$;

световой год – расстояние, которое свет проходит за один год.

Соотношение между этими единицами таково:

$$1 \text{ пк} = 30,86 \cdot 10^{12} \text{ км} = 206265 \text{ а.е.} = 3,26 \text{ светового года};$$

$$1 \text{ световой год} = 9,460 \cdot 10^{12} \text{ км} = 63240 \text{ а.е.} = 0,3067 \text{ пк}.$$

В астрономических единицах обычно выражают расстояния до тел Солнечной системы. Например, Меркурий находится от Солнца на расстоянии 0,387 а.е., а Плутон – на расстоянии 39,4 а.е. Расстояния до небесных тел за пределами Солнечной системы обычно выражаются в парсеках, килопарсеках (10^3 пк) и мегапарсеках (10^6 пк), а также в световых годах.

В настоящее время метод годовых параллаксов теоретически позволяет измерять расстояния до 1600 световых лет ($\Delta = 0,002''$). Но на таком большом расстоянии точность измерения уменьшается до 50%.

Еще большие расстояния удалось измерить другим методом, основанном на изучении закономерностей светимости переменных звезд. Во Вселенной встречаются переменные звезды двух типов – *затменно-переменные*, когда имеются две звезды, вращающиеся вокруг общего центра масс и при этом более яркая периодически затмевает менее яркую, и *физически переменные*, когда пульсирует одна звезда. Типичным представителем физически переменной звезды, регулярно меняющей свою яркость, является звезда δ созвездия Цефея. Все физически переменные звезды (а их достаточно много во Вселенной) принято называть цефеидами. В начале XX века в Гарвардской обсерватории (США) стали изучать цефеиды в соседней галактике, известной под названием Магелланового облака. Каждая цефеида имеет свой характерный период изменения яркости: от нескольких дней до сотен дней и более. Была найдена закономерность: чем длиннее оказывался период изменения яркости, тем ярче была сама звезда. А расстояние от Земли до Магелланового облака во много раз больше расстояния между самими звездами, т.е. с большой точностью их можно считать равноудаленными от Земли. Отсюда вывод: связь между периодом и яркостью носит абсолютный характер, цефеиды с одинаковым периодом обладают одинаковой яркостью. Поэтому, если на небе обнаруживались две цефеиды с одинаковыми периодами, но при этом яркость одной была в четыре раза меньше, то это означало, что она расположена вдвое дальше – яркость меняется обратно пропорционально квадрату расстояния.

Самое же большое из известных расстояний было измерено так. В оптике известен эффект Доплера – изменение частоты света, излучаемого объектом, при его приближении к наблюдателю или удалении от него. В акустике этот эффект тоже существует – каждый, кто находился на железнодорожной платформе при прохождении сигнальной электрички, мог убедиться, что при приближении тон сигнала высокий, а при удалении низкий. По изменению частоты можно вычислить относительную скорость. В двадцатые годы прошлого века астрономы в результате измерений доплеровского смещения спектральных линий света от галактик обнаружили, что почти все они разлетаются, и в ряде случаев с очень большой скоростью. Так, скорость удаления от нас галактик в созвездии Девы составляет около 1000 км/с. А сейчас найдены объекты, удаляющиеся со скоростями порядка 0,8 скорости света (240000 км/с). В конце 20-х годов прошлого века американский астроном Э.Хаббл показал, что скорость относительного движения галактик пропорциональна расстоянию между ними – более далекие от нас галактики имеют большую скорость, чем близкие. Связь между скоростями галактик и расстоянием до них устанавливается законом Хаббла: $v = H L$, где коэффициент пропорциональности H называют постоянной Хаббла. В настоящее время значения постоянной Хаббла, оцениваемые различными авторами, лежат в пределах от 60 до 80 км/(с·Мпк). Обычно используется значение постоянной Хаббла 75 км/(с·Мпк). При этом расстояние до объекта, имеющего скорость 240000 км/с, оказывается равным

$$L_{\max} = 3200 \text{ Мпк} = 10^{23} \text{ км} = 10^{10} \text{ световых лет}.$$

Таково наибольшее измеренное к настоящему времени расстояние – самый «край» Вселенной.

Физика таранного устройства

С. СЕРОХВОСТОВ, А. ХИЩЕНКО

ЧТО НИ ГОВОРИТЕ, А В СРЕДНИЕ ВЕКА БЫЛО ХОТЯ И страшновато, но интересно. Толстые стены крепостей, большие запасы воды и продовольствия – все это делало военное ремесло искусством, а штурм крепости – долгим и кропотливым занятием.

Вот, например, типичная сцена штурма: дюжина широкоплечих молодцов подхватывает бревно, разбегается и ... ворота крепости лишь вздрогнули и закрипели в петлях. А вечером у воеводы состоялся неприятный разговор. Самый отчаянный из молодцов заявил прямо, что с таким бревном они на таран больше не пойдут. И придумал тут воевода, закручинился.

Подумаем и мы, можно ли на основе наших знаний получить «законы функционирования» и оптимальные параметры тарана.

Сначала проанализируем конструкцию ворот и принцип действия тарана (рис.1). Пусть ворота состоят из двух створок (воротин) длиной L и массой M . Ворота висят на петлях (возможно, несмазанных и скрипящих) и запираются при помощи поперечины-бруса, который закрепляется на створках вблизи своих концов. Бревно (таран) массой m со скоростью v ударяется в ворота. В результате удара створки приобретают некоторую угловую скорость ω относительно своих петель, и, кроме того, петлям передается определен-

ный импульс, т.е. происходит удар. Затем, по мере того как воротины в процессе вращения отклоняются от своего положения равновесия, запирающий брус изгибается и все больше препятствует их дальнейшему отклонению. Чем больше изгибается брус, тем большие механические напряжения в нем возникают. Если напряжение в какой-либо точке бруса окажется больше предела прочности материала, брус слома-

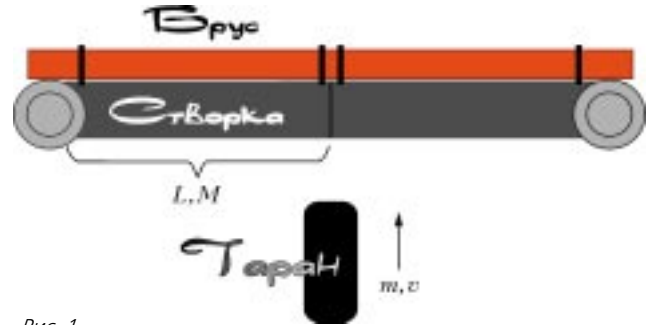


Рис. 1

ется. В конечном итоге в процессе ударов разрушается либо поперечина, либо место закрепления поперечины, либо точки крепления ворот к петлям, либо сами петли (или же реализуется сразу несколько вариантов).

Чтобы как-то оценить эффект удара, введем некий критерий эффективности. Для этого сначала исследуем возможные причины разрушений в результате удара. За счет кинетической энергии, которую приобретают створки после удара, будет происходить изгиб и слом бруса и разрушение точек его крепления. Так как кинетическая энергия ворот монотонно зависит от угловой скорости ω и большей энергии соответствует больший разрушительный эффект, то разумно в качестве критерия эффективности удара выбрать именно ω .

Разрушительный эффект в процессе удара, очевидно, будет пропорционален изменению импульса системы Δp , который передается через петли и их крепления на стены крепости. Трудно заранее сказать, от каких параметров и как оно зависит, поэтому сначала найдем зависимость изменения



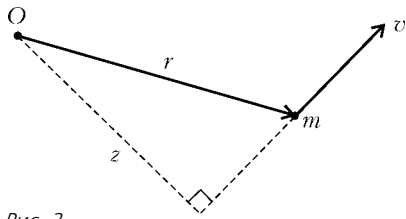


Рис. 2

импульса системы от начальной скорости бревна и параметров бревна и ворот.

Итак, нужно найти ω и Δp . Сам процесс удара достаточно сложен для физического и математического описания, а нам в конечном итоге нужно знать лишь значения искомых величин *после* удара. Поэтому, как всегда в задачах на удар, будем использовать законы сохранения. Очевидно, что с практической точки зрения крайне нежелательны пустые потери механической энергии в процессе удара. Например, если бревно при ударе трескается или сминается, то это невыгодно штурмующим (они такое бревно просто не будут использовать). Если же трескаются и сминаются ворота, то это невыгодно обороняющимся (тогда и наше исследование теряет смысл – несколько ударов тараном проделают в воротах дыру). Таким образом, будем считать, что таран и ворота достаточно крепкие и механическая энергия при ударе сохраняется. Значит, одно уравнение у нас уже есть – закон сохранения энергии. Однако неизвестными в нем будут две величины – угловая скорость створок ворот и скорость бревна после удара (ведь после абсолютно упругого удара бревно в общем случае должно иметь некоторую скорость).

Хотелось бы в качестве второго уравнения записать закон сохранения импульса, но он, к сожалению, не сохраняется: система ворот – бревно не является замкнутой, так как ворота связаны со стенами крепости и могут передавать им или получать от них импульс в процессе удара. Но, к счастью, есть еще одна величина, которая может сохраняться, – момент импульса. Возможно, не все читатели с ней знакомы, поэтому скажем об этой величине несколько слов.

Если на плоскости заданы материальная точка массой m , ее скорость \vec{v} и заранее выбранная точка пространства O , то моментом импульса \vec{N} материальной точки относительно точки O называется векторное произведение радиуса-вектора материальной точки \vec{r} , проведенного из точки O , на ее импульс $m\vec{v}$ (рис.2). Модуль момента импульса равен произведению импульса материальной точки на его плечо z , т.е. на расстояние от точки O до прямой, проходящей через материальную точку и коллинеарной вектору v :

$$N = mvz.$$

(Кстати, это определение очень похоже на определение момента силы.)

Если мы хотим узнать момент импульса тела, имеющего ненулевые размеры и вращающегося относительно определенной оси, то следует его разделить (мысленно) на маленькие кусочки, для каждого кусочка вычислить момент импульса, а затем полученные значения просуммировать. При этом момент импульса оказывается пропорциональным угловой скорости вращения тела, а коэффициент пропорциональности I называется моментом инерции тела. Момент инерции по своему физическому смыслу аналогичен массе: он зависит только от распределения плотности в теле и положения оси вращения и не зависит от частоты вращения и других внешних условий. Более того, кинетическая энергия вращающегося тела выражается аналогично кинетической энергии материальной точки – она равна половине

произведения момента инерции на квадрат угловой скорости вращения тела:

$$W_k = \frac{1}{2} I \omega^2.$$

Если на систему точек не действуют внешние силы или рассматриваемый промежуток времени так мал, что моменты внешних сил незначительны (например, при ударе), то суммарный момент импульса системы сохраняется (как сохраняется импульс системы в отсутствие внешних сил).

Так как наша система ворот – бревно симметрична относительно средней линии, то можно рассмотреть только «половину» системы (половина бревна и одна створка). Моменты внешних сил в данной системе отсутствуют (трением в петлях пока пренебрегаем), поэтому момент импульса сохраняется. Кроме того, будем считать, что в системе в момент удара нет потерь энергии. Момент инерции половины бревна относительно одной из петель равен $m v L / 2$. Тогда законы сохранения момента импульса и энергии будут выглядеть так:

$$\frac{m}{2} v L = \frac{m}{2} v_1 L + I \omega,$$

$$\frac{m}{2} \frac{v^2}{2} = \frac{m}{2} \frac{v_1^2}{2} + I \frac{\omega^2}{2},$$

где v_1 – скорость бревна после удара, I – момент инерции створки относительно точки вращения, т.е. центра петли. В нашем случае $I = M L^2 / 3$ (это вычислили еще до нас). Отсюда найдем угловую частоту вращения створки сразу после удара:

$$\omega = \frac{2mLv}{2I + mL^2} = \frac{1}{L} \frac{2mv}{m + 2M/3}.$$

Импульс, который передается петлям, равен, с противоположным знаком, изменению импульса системы (импульс створки равен импульсу ее центра масс, который находится в середине створки, так что его скорость равна $\omega L / 2$):

$$\Delta p = M \omega \frac{L}{2} + \frac{m}{2} (v_1 - v) = M \omega \frac{L}{2} - \frac{I \omega}{L} = \frac{m M v}{2M + 3m}.$$

Из полученных формул можно сразу сделать интересный вывод: даже если мы устремим массу бревна к бесконечности, то угловая скорость ворот не превысит величины $2v/L$, а переданный импульс не будет больше чем $Mv/3$. Поэтому с данной точки зрения выгодно увеличивать скорость бревна, а не массу. Кроме того, становится очевидным, что угловая частота ворот может быть критерием эффективности удара и при рассмотрении разрушений в петлях и точках крепления ворот. Исходя из этого, будем считать ω *универсальным критерием эффективности удара*. Однако понятно, что, для того чтобы разрушить петли, следует наносить удары по возможности ближе именно к петлям. Но обычно тараном бьют в центральную часть ворот, т.е. пытаются сломать именно брус. Это можно объяснить, с одной стороны, тем, что петли достаточно прочные, а, с другой стороны, тем, что сила удара в петлях зависит не только от изменения импульса, но и от продолжительности удара. Поэтому в дальнейшем будем говорить о разрушениях, которые происходят *после* удара.

Итак, непосредственно после удара створки ворот имеют угловую скорость ω и соответствующую ей кинетическую энергию. В процессе движения эта энергия частично переходит в потенциальную энергию изогнутого бруса, а частично расходуется на работу против сил трения в петлях. Максимальные механические напряжения также зависят от степени изгиба бруса, поэтому пришло время поговорить про изгибы.

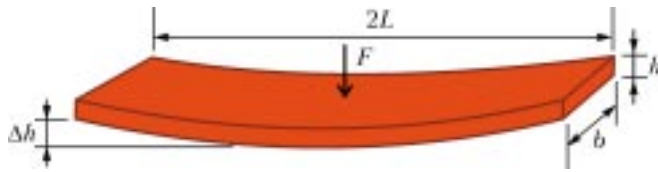


Рис. 3

Представим запирающий брус в виде прямоугольного параллелепипеда длиной $2L$, высотой b и толщиной h (рис. 3). Пусть под действием внешней силы, приложенной в середине, брус прогнулся на величину Δh (считаем, что $\Delta h \ll L$). Заглянув в учебник по сопротивлению материалов, найдем потенциальную энергию бруса в этом случае:

$$W_{\text{п}} = \frac{1}{4} \frac{Ebh^3}{L^3} (\Delta h)^2,$$

где E – модуль Юнга для материала бруса. Очевидно, что максимальное напряжение σ_{max} будет на поверхности бруса на расстоянии L от концов, т.е. посередине бруса (см. рис.3). Оно связано с прогибом соотношением (опять заглянем в учебник)

$$\sigma_{\text{max}} = \frac{3}{2} \frac{Eh}{L^2} \Delta h.$$

Если это напряжение превышает предел прочности, то брус ломается.

Подумаем теперь о том, сколько энергии теряется в петлях. Очевидно, что потери будут зависеть от угла поворота створки ворот, причем для малых углов поворота этот угол равен примерно $\Delta h/L$. Тогда работа против сил трения будет равна

$$A_{\text{тр}} = \frac{M_{\text{тр}} \Delta h}{L},$$

где $M_{\text{тр}}$ – момент сил трения в петлях. Кстати, при больших углах поворота створок есть опасность того, что концы бруса выскочат из мест крепления. Будем, однако, считать, что брус не выскочит, т.е. что угол поворота действительно мал.

Теперь, задав значение σ_{max} , определим потенциальную энергию, соответствующую разрушению бруса, и работу против сил трения, а затем запишем закон сохранения энергии:

$$2I \frac{\omega^2}{2} = \frac{\sigma_{\text{max}}^2 bhL}{9E} + M_{\text{тр}} \frac{2L\sigma_{\text{max}}}{3Eh}.$$

Далее воспользуемся найденным ранее выражением для ω и получим

$$\frac{4m^2 v^2 M}{3(m + 2M/3)^2} = \frac{L}{E} \left(\frac{\sigma_{\text{max}}^2 bh}{9} + M_{\text{тр}} \frac{2\sigma_{\text{max}}}{3h} \right). \quad (*)$$

С помощью этих формул можно не только определить величины m и v (или ω), необходимые для слома бруса, но и наметить пути повышения стойкости ворот (рекомендации обороняющимся). Часть этих рекомендаций, в принципе, достаточно понятны – нужно использовать древесину с высоким пределом прочности (σ_{max}), брус делать пошире и потолще (b и h), хотя для толщины есть свое оптимальное значение. Этот оптимум можно найти, взяв производную от равенства (*) по h и приравняв ее к нулю. В результате получим

$$h_{\text{опт}} = \sqrt{\frac{6M_{\text{тр}}}{\sigma_{\text{max}} b}}.$$

Кроме того, понятно, что не стоит на время осады смазывать петли (в несмазанных петлях $M_{\text{тр}}$ больше). Далее, ворота следует делать потяжелее, а при осаде можно их дополни-

тельно утяжелять. А вот модуль Юнга должен быть меньше (хотя это, может быть, и не совсем понятно на первый взгляд). Это условие означает тот факт, что брус должен быть достаточно гибким – ведь мы знаем из повседневного опыта, что сломать твердый и хрупкий предмет проще, чем упругий.

Формула (*) позволяет определить, с какой минимальной скоростью должно двигаться бревно, чтобы пробить ворота. Действительно, устремим m к бесконечности и получим

$$4v^2 M = \frac{3L}{E} \left(\frac{\sigma_{\text{max}}^2 bh}{9} + M_{\text{тр}} \frac{2\sigma_{\text{max}}}{3h} \right).$$

Таким образом, зная параметры ворот, можно определить, до какой минимальной скорости нужно разогнать бревно, чтобы сломать брус с первого раза. Однако бревно при этом должно быть бесконечной массы. Ясно, что использовать такое орудие невозможно – нужно бесконечное число воинов для его подъема, бесконечное число подвод для транспортировки и т.д., да и изготовить такой таран будет трудновато. Тогда нужно найти некоторый оптимум по массе бревна.

Для этого следует знать, во-первых, с какой максимальной скоростью воин может бежать без нагрузки и, во-вторых, как будет зависеть скорость бега воина от нагрузки на его плечах. Если максимальная скорость без нагрузки меньше минимально допустимой, то молодцам следует заняться спортом. Если боец «укладывается в нормативы», то следует, очевидно, экспериментальным путем найти зависимость скорости бега воина от дополнительной массы, которую он несет на плечах. Затем, зная искомую зависимость и количество воинов, можно при помощи формулы (*) определить необходимую массу и скорость бревна. А вот в том, как правильно подобрать количество воинов, и состоит отчасти военное искусство – ведь здесь уже нужно учитывать особенности крепости и возможные действия неприятеля, а также и психологические нюансы своих бойцов и бойцов противника.

Ну, а если добры молодцы даже после тренировок не могут достичь минимально необходимой скорости (комендант крепости провел работы по укреплению ворот), можно ли тогда сломать брус тараном? Оказывается, можно. Но об этом – в другой раз. А пока заметим следующее.

Вероятность того, что на книжной полке у воеводы не окажется учебника по сопротивлению материалов и справочника с нужными характеристиками материалов, практически равна единице. Но как же он тогда сможет получить необходимые зависимости? Ответ достаточно прост: нужно ставить эксперимент.

Например, зависимость энергии бруса от прогиба можно определить следующим образом: кладем брус концами на упоры, на середину помещаем грузы известной массы и измеряем величину прогиба. Если теперь известна зависимость прогиба Δh от действующей на брус силы F или, наоборот, известна зависимость $F(\Delta h)$, то энергию можно определить через работу, которую нужно совершить над брусом для изгиба его на соответствующую величину:

$$W_{\text{п}} = \int_0^{\Delta h} F(x) dx.$$

Тут можно возразить, что воевода вряд ли знал интегралы. Однако значение интеграла можно получить и без интегрирования, ведь интеграл есть площадь под графиком интегрируемой функции: достаточно нарисовать график, скажем, на дощечке, выпилить соответствующую фигуру пилой и просто взвесить.

Посмотрим сквозь линзу

В. ДРОЗДОВ

СРЕДИ КОНКУРСНЫХ ЗАДАЧ ПО ОПТИКЕ ДОВОЛЬНО ЗАМЕТНУЮ ЧАСТЬ СОСТАВЛЯЮТ ЗАДАЧИ, В КОТОРЫХ ФИГУРИРУЕТ ТОНКАЯ ЛИНЗА. Это естественно, поскольку линзы присутствуют в самых разных оптических приборах. Нередко такие задачи вызывают трудности. Однако, если проанализировать возможные варианты расположения предмета и его изображения в линзе и систематизировать полученные результаты в виде графиков и таблиц, то можно значительно облегчить решение целой группы задач. Достаточно будет лишь составить уравнение или систему уравнений, решение которых это уже чисто математическая проблема.

Введем такие обозначения: F – фокусное расстояние линзы, d и f – расстояния от предмета и его изображения до линзы, h и H – высоты предмета и его изображения соответственно. Все перечисленные величины будем, естественно, считать положительными, как длины отрезков (это удобно при решении задач), а знак «минус» будет появляться перед

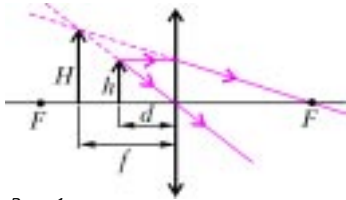


Рис. 1

ними только по законам алгебры. Начиная с собирающей линзы. Поскольку предмет может находиться как перед фокусом линзы, так и за ним, эти два случая будем рассматривать отдельно.

Пусть $0 < d < F$ (рис.1).

Выражая двояко увеличение линзы $\frac{H}{h}$, записываем систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{H}{h} = \frac{f}{d}, \\ \frac{H}{h} = \frac{F+f}{F}. \end{cases}$$

Отсюда можно получить формулу линзы:

$$\frac{1}{d} - \frac{1}{f} = \frac{1}{F},$$

а также расстояние от изображения до линзы и увеличение линзы:

$$f = \frac{Fd}{F-d} \text{ и } \frac{H}{h} = \frac{F}{F-d}.$$

Интересно определить расстояние l между предметом и его изображением в этом случае:

$$l = f - d = \frac{d^2}{F-d}.$$

Пусть теперь $F < d < \infty$ (рис.2). Аналогично, имеем систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{H}{h} = \frac{f}{d}, \\ \frac{H}{h} = \frac{f-F}{F}, \end{cases}$$

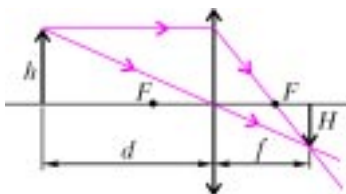


Рис. 2

из которой получаем формулу линзы:

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F}$$

и выражения для f и $\frac{H}{h}$:

$$f = \frac{Fd}{d-F} \text{ и } \frac{H}{h} = \frac{F}{d-F}.$$

В данном случае расстояние между предметом и его изображением равно

$$l = f + d = \frac{d^2}{d-F}.$$

Графики зависимости f , $\frac{H}{h}$ и l от d приведены, соответственно, на рисунках 5, а, б и в. Обсудим эти графики с

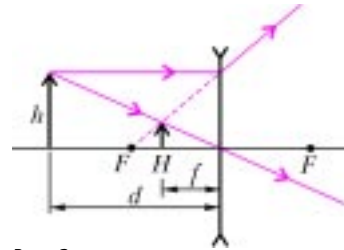


Рис. 3

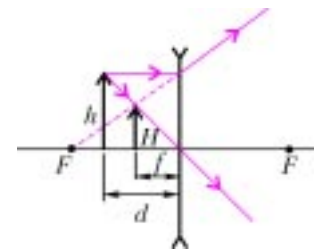


Рис. 4

математической точки зрения. Все три кривые имеют вертикальную асимптоту $d = F$, так как они терпят разрыв в этой точке. Первые две кривые имеют еще горизонтальные асимптоты: соответственно, $f = F$ и $\frac{H}{h} = 0$, а третья кривая – наклонную под углом 45° к горизонтальной оси асимптоту $l = d + F$. Последнее следует вот откуда:

$$l = \frac{d^2}{d-F} = \frac{d^2 - F^2}{d-F} + \frac{F^2}{d-F} = d + F + \frac{F^2}{d-F}.$$

Кривые, изображенные на рисунках 5, а и б, – это участки гиперболы, так как, например,

$$f = \frac{Fd}{d-F} = \frac{(d-F)F + F^2}{d-F} = F + \frac{F^2}{d-F}.$$

Третья же кривая – более сложная и гиперболой не является, что ясно из ее уравнения. При $F < d < 2F$ эта функция имеет точку минимума $(2F; 4F)$, в которой достигается ее наименьшее значение на этом интервале. Это можно, конечно, установить общим методом с помощью производной. Однако интересны такие два частных способа.

Первый способ. Преобразуем выражение для l :

$$\begin{aligned} l &= \frac{d^2}{d-F} = \frac{1}{\frac{1}{d} - F} = \frac{1}{-F\left(\frac{1}{d^2} - F \cdot \frac{1}{d}\right)} = \\ &= \frac{1}{-F\left(\left(\frac{1}{d} - \frac{1}{2F}\right)^2 - \frac{1}{4F^2}\right)} = \frac{1}{\frac{1}{4F} - F\left(\frac{1}{d} - \frac{1}{2F}\right)^2}. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что $l_{\min} = 4F$ при $d = 2F$.

Второй способ. Запишем выражение для l в виде квадратного уравнения

$$d^2 - ld + lF = 0.$$

Так как оно, исходя из физических соображений, имеет решение, то его дискриминант неотрицательный: $l^2 - 4lF \geq 0$

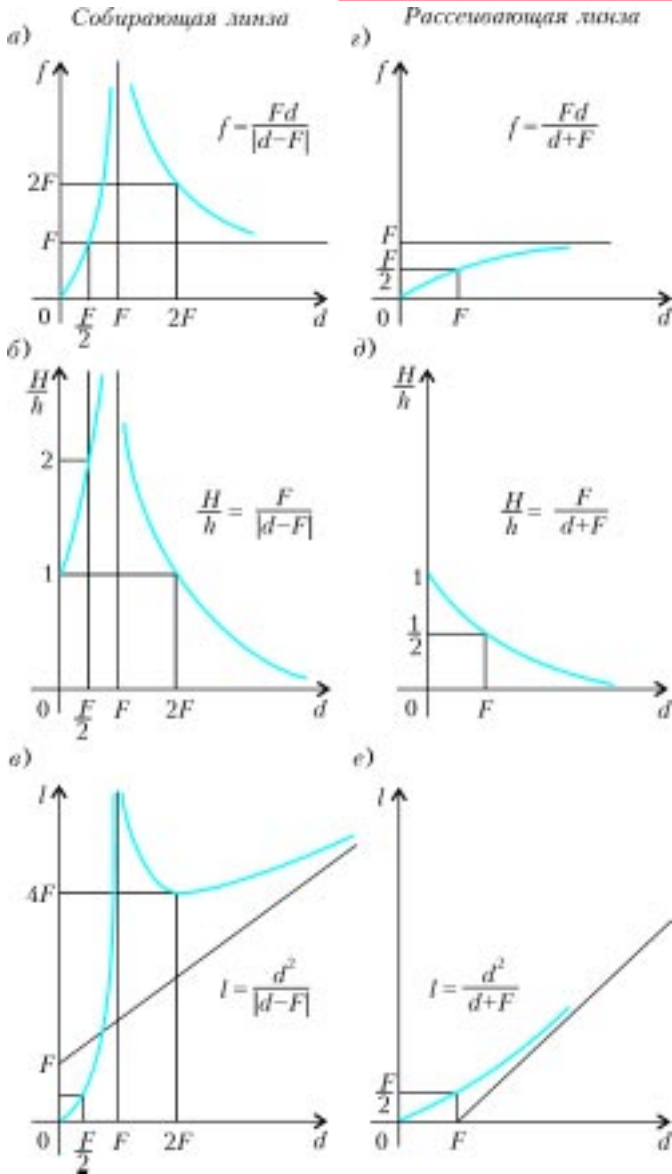


Рис. 5

(равенство достигается при $d = \frac{l}{2}$). Значит, $l \geq 4F$, т.е. $l_{\min} = 4F$ при $d = 2F$.

Отметим, что если $d = 2F$, то $f = 2F$ и $H = h$. Это означает, что изображение получается в натуральную величину.

Рассмотрим теперь рассеивающую линзу. Из рисунков 3 и 4 видно, что, независимо от того, находится предмет перед фокусом линзы или за ним, получается одна и та же система

уравнений

$$\begin{cases} \frac{H}{h} = \frac{f}{d}, \\ \frac{H}{h} = \frac{F-f}{F}. \end{cases}$$

Отсюда получаем формулу рассеивающей линзы:

$$\frac{1}{d} - \frac{1}{f} = -\frac{1}{F},$$

расстояние от линзы до изображения и увеличение линзы:

$$f = \frac{Fd}{d+F} \text{ и } \frac{H}{h} = \frac{F}{d+F}.$$

Заметим, что рассеивающая линза всегда дает уменьшенное изображение, т.е. $\frac{H}{h} < 1$. Расстояние между предметом и его изображением в этом случае равно

$$l = d - f = \frac{d^2}{d+F}.$$

Строим соответствующие графики для рассеивающей линзы (рис. 5, z, d и e). В отличие от первой тройки графиков на рисунке 5, вторая тройка представляет собой непрерывные кривые. При этом кривые для f и $\frac{H}{h}$ — это тоже части гипербол с горизонтальными асимптотами $f = F$ и $\frac{H}{h} = 0$ соответственно. Кривая для l более сложная и имеет наклонную под углом 45° к горизонтальной оси асимптоту $l = d - F$, ибо

$$\frac{d^2}{d+F} = \frac{d^2 - F^2}{d+F} + \frac{F^2}{d+F} = d - F + \frac{F^2}{d+F}.$$

Представляется полезным все сказанное свести в соответствующую таблицу.

Теперь переходим к рассмотрению конкретных задач. Все они в свое время предлагались на вступительных экзаменах в различные вузы.

Задача 1. Предмет и его прямое изображение расположены симметрично относительно фокуса линзы. Расстояние от предмета до фокуса линзы $l = 4$ см. Найдите фокусное расстояние линзы.

Допустим, что линза собирающая. Очевидно, что при этом $0 < d < F$, т.е. изображение мнимое, поскольку оно прямое. Имеем систему уравнений

$$\begin{cases} f = \frac{Fd}{F-d}, \\ f - F = F - d, \\ f - F = l. \end{cases}$$

Таблица

Линза	Расстояние предмета от линзы, d	Формула линзы	Расстояние изображения от линзы, f	Вид изображения	Расположение изображения	Увеличение линзы, $\frac{H}{h}$	Расстояние между предметом и его изображением, l
собирающая	$0 < d < F$	$\frac{1}{d} - \frac{1}{f} = \frac{1}{F}$	$\frac{Fd}{F-d}$	мнимое	прямое	$\frac{F}{F-d} > 1$	$\frac{d^2}{F-d}$
	$F < d < \infty$	$\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F}$	$\frac{Fd}{d-F}$	действительное	перевернутое	$\frac{F}{d-F} \geq 1$	$\frac{d^2}{d-F}$
рассеивающая	$0 < d < \infty$	$\frac{1}{d} - \frac{1}{f} = -\frac{1}{F}$	$\frac{Fd}{d+F}$	мнимое	прямое	$\frac{F}{d+F} < 1$	$\frac{d^2}{d+F}$

Выразим из второго и третьего уравнений f и d через F и l и подставим в первое. Получим уравнение

$$F^2 - 2lF - l^2 = 0$$

с искомым положительным корнем

$$F = l(1 + \sqrt{2}) \approx 9,66 \text{ см.}$$

Если линза рассеивающая, то приходим к системе уравнений

$$\begin{cases} f = \frac{Fd}{d+F}, \\ d-F = F-f, \\ d-F = l. \end{cases}$$

Результат — то же уравнение

$$F^2 - 2lF - l^2 = 0.$$

Таким образом, задача имеет одно решение, но в двух случаях: собирающей и рассеивающей линз.

Задача 2. Предмет находится на расстоянии $d = 10$ см от собирающей линзы с фокусным расстоянием $F = 20$ см. Во сколько раз изменится величина изображения, если на место собирающей линзы поставить рассеивающую с тем же по модулю фокусным расстоянием?

Отношение величин изображений равно, очевидно, отношению увеличений:

$$H_2 : H_1 = \frac{F}{d+F} : \frac{F}{F-d} = \frac{F-d}{d+F} = \frac{1}{3}.$$

Задача 3. Расстояние между предметом, находящимся на оптической оси линзы, и его действительным изображением равно $l = 6,25F$, где F — фокусное расстояние линзы. Найдите расстояние от предмета до линзы и от линзы до изображения. Как объяснить наличие двух решений?

Так как изображение действительное, то линза собирающая и $d > F$. Поэтому уравнение

$$\frac{d^2}{d-F} = 6,25F$$

приводит к квадратному уравнению

$$4d^2 - 25Fd + 25F^2 = 0$$

с корнями

$$d_1 = 5F \text{ и } d_2 = 1,25F.$$

Соответственно, получаем

$$f_1 = 6,25F - 5F = 1,25F \text{ и } f_2 = 6,25F - 1,25F = 5F.$$

Существование двух решений физически вытекает из обратимости световых лучей. С математической точки зрения, оба корня подходят, так как они удовлетворяют условию $d > F$.

Задача 4. Какова оптическая сила линзы, с помощью которой можно получить увеличенное или уменьшенное изображение предмета на экране, находящемся от него на расстоянии $L = 0,9$ м, если отношение размеров получаемых изображений $\alpha = 4$?

Поскольку мнимое изображение нельзя получить на экране, то изображение в обоих случаях действительное. Тогда $d > F$. Но, учитывая, что $\alpha > 1$, приходим к такому выводу:

$$F < d_1 < 2F, \quad 2F < d_2 < \infty,$$

где d_1 — меньший, а d_2 — больший корень уравнения

$$\frac{d^2}{d-F} = L.$$

Кроме того,

$$\frac{d_2 - F}{d_1 - F} = \alpha.$$

Очевидно, получаем уравнение

$$\frac{L/2 + \sqrt{L^2/4 - FL} - F}{L/2 - \sqrt{L^2/4 - FL} - F} = \alpha.$$

Сначала уничтожаем иррациональность в знаменателе:

$$\frac{(L/2 - F + \sqrt{L^2/4 - FL})^2}{F^2} = \alpha.$$

Затем извлекаем арифметический корень:

$$\frac{L}{2} - F + \sqrt{\frac{L^2}{4} - FL} = F\sqrt{\alpha}, \text{ или}$$

$$\sqrt{\frac{L^2}{4} - FL} = F(1 + \sqrt{\alpha}) - \frac{1}{2}L.$$

После возведения последнего уравнения в квадрат оно существенно упрощается:

$$F^2(1 + \sqrt{\alpha})^2 = FL\sqrt{\alpha},$$

откуда получаем

$$F = \frac{L\sqrt{\alpha}}{(1 + \sqrt{\alpha})^2}.$$

Тогда искомая оптическая сила линзы равна

$$D = \frac{1}{F} = \frac{(1 + \sqrt{\alpha})^2}{L\sqrt{\alpha}} = 5 \text{ дптр.}$$

Задача 5. Расстояние от заднего фокуса собирающей линзы до изображения в 9 раз больше расстояния от переднего фокуса до предмета. Найдите увеличение линзы.

Если $d < F$, то имеем систему уравнений

$$\begin{cases} f + F = 9(F - d), \\ f = \frac{Fd}{F - d}, \\ \Gamma = \frac{F}{F - d}, \end{cases}$$

где Γ — искомое увеличение. Исключая f из первых двух уравнений, получим уравнение

$$9d^2 - 18Fd + 8F^2 = 0$$

с удовлетворяющим нас корнем $d = \frac{2}{3}F$. Тогда $\Gamma = 3$.

Если $d > F$, то приходим к системе

$$\begin{cases} f - F = 9(d - F), \\ f = \frac{Fd}{d - F}, \\ \Gamma = \frac{F}{d - F}, \end{cases}$$

из которой получим такое же уравнение

$$9d^2 - 18Fd + 8F^2 = 0$$

с подходящим ббльшим корнем $d = \frac{4}{3}F$. И опять $\Gamma = 3$.

Таким образом, задача имеет одно решение, реализуемое в двух случаях: $d_1 = \frac{2}{3}F$ и $d_2 = \frac{4}{3}F$. В этом легко убедиться, построив два раза ход лучей.

Обратите внимание, что при решении задач графики и таблица избавили нас от необходимости делать дополнительные чертежи.

В заключение приведем задачи для самостоятельного решения.

Упражнения

1. Точечный источник света находится на оси тонкой собирающей линзы. Расстояние между источником и ближайшим к нему фокусом l , расстояние между источником и его изображением L . Определите фокусное расстояние линзы.
2. Найдите фокусное расстояние собирающей линзы, если произведение расстояния от предмета до переднего фокуса на расстояние от заднего фокуса до изображения равно a^2 .
3. Расстояние между предметом и его прямым изображением в линзе $l = 5$ см. Линейное увеличение $\Gamma = 0,5$. Определите фокусное расстояние линзы.
4. Линзу, дающую действительное изображение предмета, передвинули на расстояние, равное ее фокусному расстоянию. При этом получилось мнимое изображение того же размера. Найдите увеличение линзы.
5. Расстояние между предметом и его изображением, даваемым тонкой положительной линзой, равно $0,5F$, где F – фокусное расстояние линзы. Каким будет это изображение – действительным или мнимым?

6. Расстояние между предметом, находящимся на оптической оси рассеивающей линзы, и его изображением равно F , где $F > 0$ – модуль фокусного расстояния линзы. Найдите расстояние от предмета до линзы.

7. Найдите фокусное расстояние собирающей линзы, если при изменении расстояния от предмета до линзы, равного первоначально $0,3$ м, на $0,1$ м расстояние от линзы до действительного изображения предмета увеличивается вдвое.

8. Расстояние от освещенного предмета до экрана $l = 100$ см. Линза, помещенная между ними, дает четкое изображение предмета на экране при двух положениях, расстояние между которыми $L = 20$ см. Найдите фокусное расстояние линзы.

9. Когда предмет находился в точке A , тонкая собирающая линза давала увеличение $\Gamma_1 = 2$, а когда предмет переместили в точку B , увеличение стало $\Gamma_2 = 3$. Каким будет увеличение, если предмет поместить в середину отрезка AB ? Предмет расположен перпендикулярно главной оптической оси линзы, изображение действительное.

10. С помощью линзы на экране получено изображение предмета с увеличением 2. Каким будет увеличение, если расстояние между предметом и экраном увеличить в 1,6 раза?

Иррациональность и квадратный трехчлен

В. ГОЛУБЕВ

В 1990 ГОДУ НА ФАКУЛЬТЕТЕ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ и кибернетики МГУ им. М.В.Ломоносова была предложена задача:

Решите неравенство

$$\sqrt{9v^2 - 48v - 21} + \sqrt{9v^2 - 51v - 15} \leq |3v - 6|. \quad (1)$$

В данной статье рассматриваются различные способы решения этой задачи.

Прямое решение

Стандартный способ решения иррациональных неравенств – это последовательное возведение в квадрат обеих частей неравенства с целью освобождения от корней. Такой способ сопровождается большой технической работой и требует серьезных усилий и терпения. В дальнейшем решение задачи подобным образом будем называть «прямым».

Обычно задачу, допускающую прямое решение, относят к разряду стандартных, сложность решения которых в основном определяется затратами времени на получение ответа.

Рассмотрим прямое решение неравенства (1). Обе части

неравенства неотрицательны. Поэтому, возводя их в квадрат, переходим к равносильному неравенству

$$VV9v^2 - 48v - 21 + 2\sqrt{9v^2 - 48v - 21} \sqrt{9v^2 - 51v - 15} + 9v^2 - 51v - 15 \leq (|3v - 6|)^2. \quad (2)$$

Комментарий 1. В неравенстве (2) произведение корней сознательно не преобразовано в корень из произведения, поскольку выражения $\sqrt{x} \sqrt{y}$ и \sqrt{xy} предъявляют различные ограничения на переменные x и y .

Так как $|m|^2 = m^2$, то $(|3v - 6|)^2 = (3v - 6)^2$, и неравенство (2) примет вид

$$2\sqrt{9v^2 - 48v - 21} \sqrt{9v^2 - 51v - 15} \leq -9v^2 + 63v + 72. \quad (3)$$

После возведения в квадрат обеих частей этого неравенства получаем

$$(3) \Leftrightarrow \begin{cases} v^2 - 7v - 8 \leq 0, \\ 3v^2 - 16v - 7 \geq 0, \\ 3v^2 - 17v - 5 \geq 0, \\ 27v^4 - 270v^3 + 647v^2 - 212v - 436 \leq 0. \end{cases} \quad (4)$$

Многочлен в левой части последнего неравенства системы (4) при $v = 2$ обращается в ноль. Поэтому он разлагается на множители:

$$27v^4 - 270v^3 + 647v^2 - 212v - 436 = (v - 2)(27v^3 - 216v^2 + 215v + 218). \quad (5)$$

Второй множитель в правой части этого равенства также обращается в ноль при $v = 2$, что позволяет и его разложить в произведение:

$$27v^3 - 216v^2 + 215v + 218 = (v - 2)(27v^2 - 162v - 109). \quad (6)$$

Используя (5) и (6), представим систему (4) в виде

$$\begin{cases} v^2 - 7v - 8 \leq 0, \\ 3v^2 - 16v - 7 \geq 0, \\ 3v^2 - 17v - 5 \geq 0, \\ (v-2)^2(27v^2 - 162v - 109) \leq 0. \end{cases} \quad (7)$$

Комментарий 2. Переход от системы (4) к системе (7) доступен далеко не каждому. Однако полезно знать, что в большинстве задач повышенной сложности линейные относительно неизвестных выражения выделяются в условии не случайно (обычно авторы, запутывая «следы» простых конструкций, делают в них линейные подстановки). Тогда, вводя вспомогательные переменные, равные линейным выражениям, зачастую удается существенно упростить вычисления и преобразования.

Например, если в исходном неравенстве (1) явно выделенную в условии подмодульную величину $3v - 6$ объявить за новую переменную u , то неравенство переписывается в виде

$$\sqrt{u^2 - 4u - 81} + \sqrt{u^2 - 5u - 81} \leq |u|.$$

Тогда система (4) принимает вид

$$\begin{cases} u^2 - 9u - 162 \leq 0, \\ u^2 - 4u - 81 \geq 0, \\ u^2 - 5u - 81 \geq 0, \\ 3u^4 - 18u^3 - 325u^2 \leq 0. \end{cases}$$

Заметим, что значение $v = 2$ не является решением второго неравенства, а следовательно, и системы (7). Но поскольку при $v \neq 2$ величина $(v-2)^2$ положительна, то, разделив обе части последнего неравенства системы (7) на $(v-2)^2$, получаем равносильную систему

$$\begin{cases} v^2 - 7v - 8 \leq 0, \\ 3v^2 - 16v - 7 \geq 0, \\ 3v^2 - 17v - 5 \geq 0, \\ 27v^2 - 162v - 109 \leq 0. \end{cases} \quad (8)$$

Наконец, решив квадратные неравенства системы (8) и расположив по возрастанию (что не очень просто!) все корни соответствующих квадратных трехчленов, находим ответ системы, т.е. ответ исходного неравенства:

$$\frac{27 - 4\sqrt{66}}{9} \leq v \leq \frac{8 - \sqrt{85}}{3}, \quad \frac{17 + \sqrt{349}}{6} \leq v \leq \frac{27 + 4\sqrt{66}}{9}.$$

В приведенном прямом решении легко выделить три этапа:

I этап – освобождение от иррациональностей (переход от неравенства (1) к системе (4));

II этап – упрощение системы (4) (переход от системы (4) к системе (8));

III этап – решение системы (8).

Преодоление каждого этапа требует терпения и аккуратности при выполнении преобразований и сопровождается, как указывалось ранее, большими затратами времени.

Возникает вопрос: на какой стадии решения можно сэкономить свои усилия? Простейшая рекомендация: поскольку вычисления желательно производить с меньшими по модулю целыми числами, то, если имеется возможность «укрупнять» переменную, есть смысл этим воспользоваться. Например, в рассматриваемом случае можно ввести вспомогательную переменную $t = 3v$ и переписать неравенство (1) так:

$$\sqrt{t^2 - 16t - 21} + \sqrt{t^2 - 17t - 15} \leq |t - 6|.$$

Тогда система (4) примет вид

$$\begin{cases} t^2 - 21t - 72 \leq 0, \\ t^2 - 16t - 21 \geq 0, \\ t^2 - 17t - 15 \geq 0, \\ 3t^4 - 90t^3 + 647t^2 - 636t - 3924 \leq 0. \end{cases}$$

Корни можно не вычислять

Многие опускают руки при попытке сравнить без калькулятора корни трехчленов, входящих в левые части неравенств системы (8). Можно ли исследовать взаимное расположение корней квадратных трехчленов, не вычисляя эти корни?

Очевидно, что в этом случае лучше обратиться к свойствам квадратичной функции и ее графика.

Пример 1. Решите систему

$$\begin{cases} v^2 - 7v - 8 \leq 0, \\ 3v^2 - 16v - 7 \geq 0. \end{cases} \quad (9)$$

Так как квадратный трехчлен $v^2 - 7v - 8$ имеет целочисленные корни -1 и 8 , то

$$(9) \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq v \leq 8, \\ 3v^2 - 16v - 7 \geq 0. \end{cases}$$

Пусть $f(v) = 3v^2 - 16v - 7$. Легко показать, что графиком функции $y = f(v)$ является парабола, ветви которой направлены вверх и которая дважды пересекает ось абсцисс. Заметим, что ось параболы пересекает отрезок $[-1; 8]$, поскольку абсцисса вершины $v_в = \frac{8}{3}$. Кроме того, значения функции $f(v)$ на концах отрезка $[-1; 8]$ положительны ($f(-1) = 12$, $f(8) = 57$). Поэтому в плоскости координат v и y имеем картину, изображенную на рисунке 1, где

$$v_- = \frac{8 - \sqrt{85}}{3} \quad \text{и} \quad v_+ = \frac{8 + \sqrt{85}}{3}$$

– корни квадратного трехчлена $3v^2 - 16v - 7$ (индексы «-» и «+» указывают на знак перед квадратным корнем). Заметим, что этот и последующие рисунки выполнены схематично, без соблюдения масштаба.

На рисунке 1 штриховкой указаны множества решений неравенств системы (9), откуда следует ответ:

$$-1 \leq v \leq v_- \quad \text{или}$$

$$v_+ \leq v \leq 8,$$

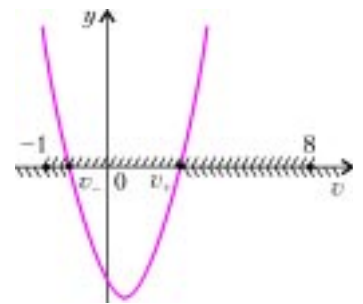


Рис. 1

т.е.

$$-1 \leq v \leq \frac{8 - \sqrt{85}}{3} \quad \text{или} \quad \frac{8 + \sqrt{85}}{3} \leq v \leq 8.$$

Пример 2. Решите систему

$$\begin{cases} 3v^2 - 16v - 7 \geq 0, \\ 3v^2 - 17v - 5 \geq 0. \end{cases} \quad (10)$$

В этом примере оба трехчлена имеют «плохие» корни.

Пусть $f(v) = 3v^2 - 16v - 7$ и $g(v) = 3v^2 - 17v - 5$. Точка пересечения графиков функций $y = f(v)$ и $y = g(v)$ опреде-

ляется системой уравнений

$$y = 3v^2 - 16v - 7 \text{ и } y = 3v^2 - 17v - 5.$$

Равенство (в этом вся «соль!») старших коэффициентов у квадратных трехчленов позволяет легко решить эту систему и получить координаты единственной общей точки двух парабол: $v = 2, y = -27$.

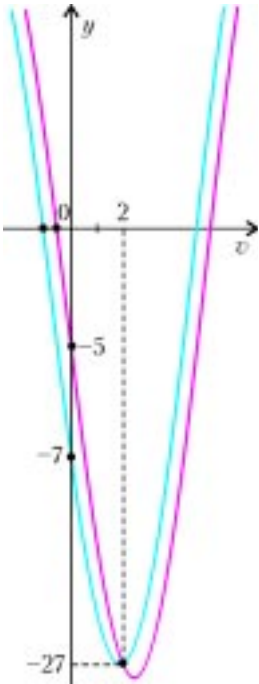


Рис. 2

Так как ветви обеих парабол направлены вверх и ордината единственной общей точки отрицательна, получаем картину взаимного расположения графиков функций $f(v)$ и $g(v)$ в координатной плоскости v, y , представленную на рисунке 2.

Чтобы выяснить, какая из двух парабол является графиком функции $y = f(v)$ и какая – графиком функции $y = g(v)$, достаточно сравнить значения этих функций при любом значении аргумента v , отличным от абсциссы общей точки (в данном случае при $v \neq 2$). Так как $f(0) = -7$ и $g(0) = -5$, то $f(0) < g(0)$, поэтому парабола, изображенная на рисунке 2 синей линией, есть график функции $y = f(v)$, а изображенная красной линией – график функции $y = g(v)$.

Если теперь ввести обозначения корней квадратных трехчленов $3v^2 - 16v - 7$ и $3v^2 - 17v - 5$, например, так: $v_-^{(f)}, v_+^{(f)}, v_-^{(g)}, v_+^{(g)}$, то из рисунка 2 сразу получаем, что

$$v_-^{(f)} < v_-^{(g)} < v_+^{(f)} < v_+^{(g)}.$$

Отсюда следует ответ системы (10):

$$v \leq v_-^{(f)} \text{ или } v \geq v_+^{(g)}.$$

Чтобы получить окончательную форму ответа, осталось вычислить корни $v_-^{(f)}$ и $v_+^{(g)}$ и подставить в последние два неравенства:

$$v \leq \frac{8 - \sqrt{85}}{3} \text{ или } v \geq \frac{17 + \sqrt{349}}{6}.$$

Пример 3. Решите систему

$$\begin{cases} 3v^2 - 17v - 5 \geq 0, \\ 27v^2 - 162v - 109 \leq 0. \end{cases} \quad (11)$$

В приведенной системе оба квадратных трехчлена имеют «плохие» корни, но уже не равные, в отличие от системы (10), старшие коэффициенты. Поэтому при попытке решить систему (11) аналогично системе (10) на стадии определения координат точек пересечения двух графиков получим квадратное, а не линейное уравнение с «плохими» корнями. Чтобы этого избежать, надо обе части первого неравенства системы (11) умножить на 9 и только после этого ввести в рассмотрение функции

$$f(v) = 27v^2 - 153v - 45 \text{ и } g(v) = 27v^2 - 162v - 109.$$

Далее устанавливаем, что графики функций $f(v)$ и $g(v)$ пересекаются в единственной точке, лежащей во второй

координатной четверти, и $f(0) > g(0)$. Тогда сразу получаем (рис.3), что

$$v_-^{(g)} < v_-^{(f)} < v_+^{(f)} < v_+^{(g)},$$

откуда следует ответ системы (11):

$$v_-^{(g)} \leq v \leq v_-^{(f)} \text{ или}$$

$$v_+^{(f)} \leq v \leq v_+^{(g)},$$

т.е.

$$\frac{27 - 4\sqrt{66}}{9} \leq v \leq \frac{17 - \sqrt{349}}{6}$$

или

$$\frac{17 + \sqrt{349}}{6} \leq v \leq \frac{27 + 4\sqrt{66}}{9}.$$

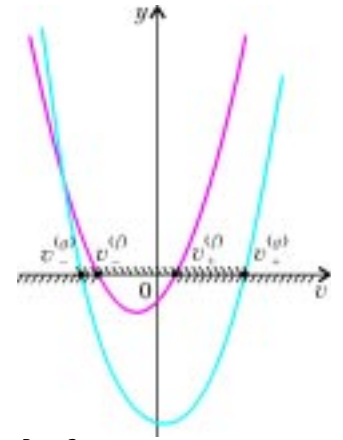


Рис. 3

Оптимальные решения

Рассмотрим теперь совсем иное решение неравенства (1). Как известно, одна из основных рекомендаций при решении уравнений и неравенств с несколькими радикалами состоит в определении взаимосвязей между подкоренными и «внекоренными» выражениями, так как зачастую эти взаимосвязи могут подсказать эффективные пути к ответу.

В данном случае, если ввести обозначения

$$x = 9v^2 - 48v - 21 \text{ и } y = 9v^2 - 51v - 15,$$

то легко обнаружить, что

$$3v - 6 = x - y.$$

Поэтому неравенство (1) можно представить в виде

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} \leq |x - y|. \quad (12)$$

Повторим, например, прямое решение, используя обозначения x и y :

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} \leq |x - y| \Leftrightarrow (\sqrt{x} + \sqrt{y})^2 \leq |x - y|^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x + 2\sqrt{x}\sqrt{y} + y \leq (x - y)^2 \Leftrightarrow 2\sqrt{x}\sqrt{y} \leq (x - y)^2 - (x + y) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x - y)^2 - (x + y) \geq 0, \\ (2\sqrt{x}\sqrt{y})^2 \leq ((x - y)^2 - (x + y))^2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0, \\ y \geq 0, \\ (x - y)^2 - (x + y) \geq 0, \\ 4xy \leq (x - y)^4 - 2(x - y)^2(x + y) + (x + y)^2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0, \\ y \geq 0, \\ (x - y)^2 - (x + y) \geq 0, \\ (x - y)^4 - 2(x - y)^2(x + y) + ((x + y)^2 - 4xy) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0, \\ y \geq 0, \\ (x - y)^2 - (x + y) \geq 0, \\ (x - y)^2((x - y)^2 - 2(x + y) + 1) \geq 0. \end{cases}$$

Возвращаясь к переменной v , заканчиваем решение по одному из указанных ранее путей.

Неравенство (12) допускает и иные варианты упрощения, которые практически нереально обнаружить, не переходя к переменным x и y . Так как

$$x - y = (\sqrt{x})^2 - (\sqrt{y})^2 = (\sqrt{x} + \sqrt{y})(\sqrt{x} - \sqrt{y})$$

и

$$|(\sqrt{x} + \sqrt{y})(\sqrt{x} - \sqrt{y})| = (\sqrt{x} + \sqrt{y})|(\sqrt{x} - \sqrt{y})|,$$

неравенство (12) можно переписать в виде

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} \leq (\sqrt{x} + \sqrt{y})|\sqrt{x} - \sqrt{y}|. \quad (13)$$

Если $x = y$, то $v = 2$. При $v = 2$ непосредственной подстановкой убеждаемся, что $x < 0$ (и $y < 0$). Поэтому равенство $x = y = 0$ невозможно. Следовательно, при $x \geq 0$ и $y \geq 0$ выражение $\sqrt{x} + \sqrt{y}$ всегда положительно. Тогда, разделив обе части неравенства (13) на $\sqrt{x} + \sqrt{y}$, получим равносильное ему неравенство

$$1 \leq |\sqrt{x} - \sqrt{y}|. \quad (14)$$

Далее возможны два варианта преобразования неравенства (14): либо возвести обе его части в квадрат, либо перейти к системе, вскрывая модуль. Рассмотрим оба варианта.

В первом варианте имеем:

$$\begin{aligned} (14) \Leftrightarrow 1^2 \leq |\sqrt{x} - \sqrt{y}|^2 &\Leftrightarrow 1 \leq (\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 1 \leq x - 2\sqrt{x}\sqrt{y} + y \Leftrightarrow 2\sqrt{x}\sqrt{y} \leq x + y - 1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x + y - 1 \geq 0, \\ (2\sqrt{x}\sqrt{y})^2 \leq (x + y - 1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x + y - 1 \geq 0, \\ x \geq 0, \\ y \geq 0, \\ 4xy \leq (x + y)^2 - 2(x + y) + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0, \\ y \geq 0, \\ x + y - 1 \geq 0, \\ (x - y)^2 - 2(x + y) + 1 \geq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Если вернуться к переменной v , то последняя система после очевидных преобразований примет вид

$$\begin{cases} 3v^2 - 16v - 7 \geq 0, \\ 3v^2 - 17v - 5 \geq 0, \\ 18v^2 - 99v - 37 \geq 0, \\ 27v^2 - 162v - 109 \leq 0. \end{cases} \quad (15)$$

Здесь только три неравенства (первое, второе и четвертое) совпадают с тремя неравенствами системы (8) (со вторым, третьим и четвертым соответственно). Но системы (8) и (15) равносильны, поскольку они равносильны неравенству (1). С другой стороны, это объясняется тем, что в системе (8) первое неравенство есть следствие четвертого, а в системе (15) третье неравенство есть следствие первых двух, т.е. исходное неравенство (1), системы (8) и (15) равносильны такой системе трех неравенств:

$$\begin{cases} 3v^2 - 16v - 7 \geq 0, \\ 3v^2 - 17v - 5 \geq 0, \\ 27v^2 - 162v - 109 \leq 0. \end{cases} \quad (16)$$

Поэтому к примерам 1–3 можно добавить еще один.

Пример 4. Найдите в данной системе неравенство, являющееся следствием остальных (каких?) неравенств

системы:

$$a) \begin{cases} v^2 - 7v - 8 \leq 0, \\ 3v^2 - 16v - 7 \geq 0, \\ 3v^2 - 17v - 5 \geq 0, \\ 27v^2 - 162v - 109 \leq 0; \end{cases} \quad б) \begin{cases} 3v^2 - 16v - 7 \geq 0, \\ 3v^2 - 17v - 5 \geq 0, \\ 18v^2 - 99v - 37 \geq 0, \\ 27v^2 - 162v - 109 \leq 0. \end{cases}$$

Решите этот пример самостоятельно.

Можно существенно усложнить это задание, запретив вычисление корней квадратных трехчленов в левых частях неравенств.

Наконец, рассмотрим цепочку преобразований неравенства (14) при втором из обозначенных выше вариантов. Так как

$$|f| \geq \varphi \Leftrightarrow \begin{cases} f \geq \varphi \\ -f \geq \varphi, \end{cases}$$

то

$$\begin{aligned} (16) \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leq \sqrt{x} - \sqrt{y} \\ 1 \leq \sqrt{y} - \sqrt{x} \end{cases} &\Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{y} + 1 \leq \sqrt{x} \\ \sqrt{x} + 1 \leq \sqrt{y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (\sqrt{y} + 1)^2 \leq (\sqrt{x})^2 \\ (\sqrt{x} + 1)^2 \leq (\sqrt{y})^2 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y + 2\sqrt{y} + 1 \leq x \\ x + 2\sqrt{x} + 1 \leq y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\sqrt{y} \leq x - y - 1 \\ 2\sqrt{x} \leq y - x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x - y - 1 \geq 0, \\ (2\sqrt{y})^2 \leq (x - y - 1)^2 \end{cases} \\ \begin{cases} y - x - 1 \geq 0, \\ (2\sqrt{x})^2 \leq (y - x - 1)^2 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} y \geq 0, \\ x - y - 1 \geq 0, \\ (x - y)^2 - 2(x + y) + 1 \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x \geq 0, \\ y - x - 1 \geq 0, \\ (x - y)^2 - 2(x + y) + 1 \geq 0. \end{cases} \end{cases} \end{aligned}$$

Возвращаясь к переменной v , находим, что исходное неравенство (1) равносильно следующей совокупности двух систем:

$$\begin{cases} 3v^2 - 17v - 5 \geq 0, \\ 3v - 7 \geq 0, \\ 27v^2 - 162v - 109 \leq 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} 3v^2 - 16v - 7 \geq 0, \\ 5v - 3 \geq 0, \\ 27v^2 - 162v - 109 \leq 0. \end{cases} \quad (17)$$

Первая система равносильна неравенству

$$\frac{17 + \sqrt{349}}{6} \leq v \leq \frac{27 + 4\sqrt{66}}{9},$$

а вторая – неравенству

$$\frac{27 - 4\sqrt{66}}{9} \leq v \leq \frac{8 - \sqrt{85}}{3}.$$

Заключение

Выше были рассмотрены различные варианты перехода от исходного неравенства (1) к равносильным ему системам и совокупностям линейных и квадратных неравенств. Очевидно, что таких вариантов много. Важно подчеркнуть, что любой подобный переход требует серьезных усилий и навыков, чтобы избежать ошибок и потери времени.

Естественно, особую сложность представляет решение полученных систем и их совокупностей ((4), (8), (15), (16), (17)) вследствие «плохих» корней фигурирующих в них квадратных трехчленов.

XXXI Всероссийская олимпиада школьников по математике

Федеральный окружной (IV) этап Всероссийской олимпиады школьников по математике проходил с 22 по 27 марта 2005 года в городах Псков (Северо-Западный федеральный округ), Тверь (Центральный), Майкоп (Южный), Уфа (Приволжский), Новосибирск (Сибирский и Уральский), Хабаровск (Дальневосточный).

Заключительный (V) этап олимпиады проходил с 23 по 29 апреля в Нижнем Новгороде на базе удобного для проведения творческих соревнований лицея – Центра одаренных школьников. В соревнованиях приняли участие победители и призеры IV этапа – представители 38 субъектов Российской Федерации, команды Москвы, Санкт-Петербурга, а также не в первый раз приезжающие к нам в гости команды Болгарии и Китая, всего 199 школьников.

Несмотря на высокую сложность заданий финала, каждая задача была решена хотя бы одним участником. Спецприз за решение самой трудной задачи олимпиады (задачи 8 для 11 класса) получил Василий Астахов из Саратова. Как обычно, многие школьники продемонстрировали свой высокий уровень, придумывая красивые решения, порой не известные до начала олимпиады членам жюри. Спецпризами за оригинальные решения и решения трудных задач олимпиады были награждены Авксентьев Евгений из Ростова-на-Дону, Митрофанов Иван из Коломны, Воробьев Сергей из Кирова, Ильин Антон из Уфы и Зубанов Константин из Луги. Традиционный приз «За волю к победе» был вручен Марине Козачок из Долгопрудного, неудачно выступившей в первый день, но единственной из всех десятиклассников решившей все задачи второго дня. Приз самого юного участника достался Виктору Омеляненко из Белгорода (его 11-летие пришлось на дни олимпиады), который завоевал право участвовать в финале своим успешным выступлением за 9 класс на IV этапе.

Следует сказать слова большой благодарности оргкомитетам всех олимпиад IV и V этапов за хорошую организацию и гостеприимство.

Приводим условия задач окружного и заключительного этапов, а также список призеров Всероссийской олимпиады по математике.

Окружной этап

8 класс

1. В 12 часов дня «Запорожец» и «Москвич» находились на расстоянии 90 км и начали двигаться навстречу друг другу с постоянной скоростью. Через два часа они снова оказались на расстоянии 90 км. Незнайка утверждает, что «Запорожец» до встречи с «Москвичом» и «Москвич» после встречи с «Запорожцем» проехали в сумме 60 км. Докажите, что он не прав.

Е.Куликов

2. В средней клетке полоски 1×2005 стоит фишка. Два игрока по очереди сдвигают ее: сначала первый игрок передвигает фишку на одну клетку в любую сторону, затем второй передвигает ее на 2 клетки, 1-й – на 4 клетки, 2-й – на 8 и т.д. (k -й сдвиг происходит на 2^{k-1} клеток). Тот, кто

не может сделать очередной ход, проигрывает. Кто может выиграть независимо от игры соперника?

О.Подлипский

3. Даны 19 карточек. Можно ли на каждой из карточек написать ненулевую цифру так, чтобы из этих карточек можно было сложить ровно одно 19-значное число, делящееся на 11?

Р.Женодаров, И.Богданов

4. Дан остроугольный треугольник ABC . Точки B' и C' симметричны, соответственно, вершинам B и C относительно прямых AC и AB . Пусть P – точка пересечения описанных окружностей треугольников ABB' и ACC' , отличная от A . Докажите, что центр описанной окружности треугольника ABC лежит на прямой PA .

В.Филимонов

5. Известно, что сумма цифр натурального числа N равна 100, а сумма цифр числа $5N$ равна 50. Докажите, что N четно.

И.Богданов

6. В четырехугольнике $ABCD$ углы A и C равны. Биссектриса угла B пересекает прямую AD в точке P . Перпендикуляр к BP , проходящий через точку A , пересекает прямую BC в точке Q . Докажите, что прямые PQ и CD параллельны.

А.Акопян

7. Найдите все такие пары (x, y) натуральных чисел, что $x + y = a^n$, $x^2 + y^2 = a^m$ для некоторых натуральных a, n, m .

В.Сендеров

8. В 99 ящиках лежат яблоки и апельсины. Докажите, что можно так выбрать 50 ящиков, что в них окажется не менее половины всех яблок и не менее половины всех апельсинов.

И.Богданов, Г.Челноков

9 класс

1. В коммерческом турнире по футболу участвовало пять команд. Каждая должна была сыграть с каждой ровно один матч. В связи с финансовыми трудностями организаторы некоторые игры отменили. В итоге оказалось, что все команды набрали различное число очков и ни одна команда в графе набранных очков не имеет нуля. Какое наименьшее число игр могло быть сыграно в турнире, если за победу начислялось три очка, за ничью – одно, за поражение – ноль?

Р.Женодаров, А.Храбров

2. См. задачу 3 для 8 класса.

3. Двое игроков по очереди расставляют в каждой из 24 клеток поверхности куба $2 \times 2 \times 2$ числа 1, 2, 3, ..., 24 (каждое число можно ставить один раз). Второй игрок хочет, чтобы суммы чисел в клетках каждого кольца из 8 клеток, опоясывающего куб, были одинаковыми. Сможет ли первый игрок ему помешать?

Л.Емельянов

4. См. задачу M1973 «Задачника «Кванта».

5. См. задачу 5 для 8 класса.

6. См. задачу M1968,а «Задачника «Кванта».

7. Существует ли такая бесконечная возрастающая арифметическая прогрессия $\{a_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ из натуральных чисел, что произведение $a_n \cdot \dots \cdot a_{n+9}$ делится на сумму $a_n + \dots + a_{n+9}$ при любом натуральном n ?

В. Сендеров

8. В 100 ящиках лежат яблоки и апельсины. Докажите, что можно так выбрать 34 ящика, что в них окажется не менее трети всех яблок и не менее трети всех апельсинов.

И. Богданов, Г. Челноков

10 класс

1. Косинусы углов одного треугольника соответственно равны синусам углов другого треугольника. Найдите наибольший из шести углов этих треугольников.

Н. Агаханов

2. Докажите, что для любого $x > 0$ и натурального n выполнено неравенство

$$1 + x^{n+1} \geq \frac{(2x)^n}{(1+x)^{n-1}}.$$

А. Храбров

3. См. задачу 4 для 9 класса.

4. Даны $N \geq 3$ точек, занумерованных числами $1, 2, \dots, N$. Каждые две точки соединены стрелкой от меньшего к большему. Раскраску всех стрелок в красный и синий цвета назовем *однотонной*, если нет двух таких точек A и B , что от A до B можно добраться и только по красным стрелкам, и только по синим. Найдите количество однотонных раскрасок.

И. Богданов, Г. Челноков

5. Арифметическая прогрессия a_1, a_2, \dots , состоящая из натуральных чисел, такова, что при любом n произведение $a_n a_{n+31}$ делится на 2005. Можно ли утверждать, что все члены прогрессии делятся на 2005?

В. Сендеров

6. См. задачу 6 для 9 класса.

7. Найдите все пары (a, b) натуральных чисел такие, что при любом натуральном n число $a^n + b^n$ является точной $(n+1)$ -й степенью.

В. Сендеров

8. На клетчатой бумаге нарисован прямоугольник, стороны которого образуют углы в 45° с линиями сетки, а вершины не лежат на линиях сетки. Может ли каждую сторону прямоугольника пересекать нечетное число линий сетки?

С. Волчѣнков

11 класс

1. Найдите все пары чисел $x, y \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, удовлетворяющие равенству $\sin x + \sin y = \sin(xy)$.

И. Богданов

2. Известно, что существует число S такое, что если $a + b + c + d = S$ и $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} = S$ (a, b, c, d отличны от нуля и единицы), то $\frac{1}{1-a} + \frac{1}{1-b} + \frac{1}{1-c} + \frac{1}{1-d} = S$. Найдите S .

Р. Женодаров

3. См. задачу 4 для 10 класса.

4. Пусть AA_1 и BB_1 – высоты остроугольного неравностороннего треугольника ABC . Известно, что отрезок A_1B_1 пересекает среднюю линию, параллельную AB , в точке C' . Докажите, что отрезок CC' перпендикулярен прямой, про-

ходящей через точку пересечения высот и центр описанной окружности треугольника ABC .

Л. Емельянов

5. Докажите, что для любого многочлена P с целыми коэффициентами и любого натурального k существует такое натуральное n , что $P(1) + P(2) + \dots + P(n)$ делится на k .

А. Голованов

6. См. задачу M1968,6 «Задачника «Кванта».

7. Каких точных квадратов, не превосходящих 10^{20} , больше: тех, у которых семнадцатая с конца цифра – 7, или тех, у которых семнадцатая с конца цифра – 8?

А. Голованов

8. В 100 ящиках лежат яблоки, апельсины и бананы. Докажите, что можно так выбрать 51 ящик, что в них окажется не менее половины всех яблок, не менее половины всех апельсинов и не менее половины всех бананов.

И. Богданов, Г. Челноков, Е. Куликов

Заключительный этап

9 класс

1. Дан параллелограмм $ABCD$ ($AB < BC$). Докажите, что окружности, описанные около треугольников APQ , для всевозможных точек P и Q , выбранных на сторонах BC и CD соответственно так, что $CP = CQ$, имеют общую точку, отличную от A .

Т. Емельянова

2. Леша поставил в клетки таблицы 22×22 натуральные числа от 1 до 22^2 . Верно ли, что Олег может выбрать такие две клетки, соседние по стороне или вершине, что сумма чисел, стоящих в клетках, делится на 4?

О. Подлипский

3. Сумма чисел a_1, a_2, a_3 , каждое из которых больше единицы, равна S , причем $\frac{a_i^2}{a_i - 1} > S$ для любого $i = 1, 2, 3$. Докажите, что

$$\frac{1}{a_1 + a_2} + \frac{1}{a_2 + a_3} + \frac{1}{a_3 + a_1} > 1.$$

С. Берлов

4. На столе лежат 365 карточек, на обратной стороне которых написаны различные числа. За один рубль Вася может выбрать три карточки и попросить Петю положить их слева направо так, чтобы числа на карточках располагались в порядке возрастания. Может ли Вася, потратив 2000 рублей, с гарантией выложить все 365 карточек на стол слева направо так, чтобы числа на них располагались в порядке возрастания?

М. Гарбер

5. Десять попарно различных ненулевых чисел таковы, что для любых из них либо сумма этих чисел, либо их произведение – рациональное число. Докажите, что квадраты всех чисел рациональны.

О. Подлипский

6. Сколькими способами числа $2^0, 2^1, 2^2, \dots, 2^{2005}$ можно разбить на два непустых множества A и B так, чтобы уравнение $x^2 - S(A)x + S(B) = 0$, где $S(M)$ – сумма чисел множества M , имело целый корень?

Н. Агаханов, И. Богданов

7. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA' и BB' . На дуге ACB описанной окружности треуголь-

ника ABC выбрана точка D . Пусть прямые AA' и BD пересекаются в точке P , а прямые BB' и AD пересекаются в точке Q . Докажите, что прямая $A'B'$ проходит через середину отрезка PQ .

А.Акопян

8. См. задачу М1975,а «Задачника «Кванта».

10 класс

1. Найдите наименьшее натуральное число, не представимое в виде $\frac{2^a - 2^b}{2^c - 2^d}$, где a, b, c, d – натуральные числа.

В.Сендеров

2. См. задачу М1971 «Задачника «Кванта».

3. См. задачу М1969 «Задачника «Кванта».

4. Окружности ω_B, ω_C – вневписанные для треугольника ABC (т.е. ω_B и ω_C касаются, соответственно, сторон AC и AB и продолжений двух других сторон). Окружность ω'_B симметрична ω_B относительно середины стороны AC , окружность ω'_C симметрична ω_C относительно середины стороны AB . Докажите, что прямая, проходящая через точки пересечения окружностей ω'_B и ω'_C , делит периметр треугольника ABC пополам.

П.Кожевников

5. В некоторые 16 клеток доски 8×8 поставили по ладье. Какое наименьшее количество пар бьющих друг друга ладей могло при этом оказаться?

Е.Куликов

6. См. задачу 7 для 9 класса.

7. Натуральные числа x и y таковы, что $2x^2 - 1 = y^{15}$. Докажите, что если $x > 1$, то x делится на 5.

В.Сендеров

8. См. задачу М1974 «Задачника «Кванта».

11 класс

1. Какое наибольшее конечное число корней может иметь уравнение

$$|x - a_1| + \dots + |x - a_{50}| = |x - b_1| + \dots + |x - b_{50}|,$$

где $a_1, a_2, \dots, a_{50}, b_1, b_2, \dots, b_{50}$ – различные числа?

И.Рубанов

2. См. задачу 3 для 10 класса.

3. Пусть A', B' и C' – точки касания вневписанных окружностей с соответствующими сторонами треугольника ABC . Описанные окружности треугольников $A'B'C', AB'C'$ и $A'BC'$ пересекают второй раз описанную окружность треугольника ABC в точках C_1, A_1 и B_1 соответственно. Докажите, что треугольник $A_1B_1C_1$ подобен треугольнику, образованному точками касания вписанной окружности треугольника ABC с его сторонами.

Л.Емельянов

4. Натуральные числа x, y, z ($x > 2, y > 1$) таковы, что $x^y + 1 = z^2$. Обозначим через p количество различных простых делителей числа x , через q – количество различных простых делителей числа y . Докажите, что $p \geq q + 2$.

В.Сендеров

5. Существует ли ограниченная функция $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ такая, что $f(1) > 0$ и $f(x)$ удовлетворяет при всех $x, y \in \mathbf{R}$ неравенству

$$f^2(x + y) \geq f^2(x) + 2f(xy) + f^2(y)?$$

Н.Агаханов

6. Можно ли расположить в пространстве 12 прямоугольных параллелепипедов P_1, P_2, \dots, P_{12} , ребра которых параллельны координатным осям Ox, Oy, Oz , так, чтобы P_2 пересекался (т.е. имел хотя бы одну общую точку) с каждым из оставшихся, кроме P_1 и P_3 , P_3 пересекался с каждым из оставшихся, кроме P_2 и P_4 , и т.д., P_{12} пересекался с каждым из оставшихся, кроме P_{11} и P_1 , P_1 пересекался с каждым из оставшихся, кроме P_{12} и P_2 ? (Поверхность параллелепипеда принадлежит ему.)

А.Акопян

7. Четырехугольник $ABCD$ с попарно непараллельными сторонами описан около окружности с центром O . Докажите, что точка O совпадает с точкой пересечения средних линий четырехугольника $ABCD$ тогда и только тогда, когда $OA \cdot OC = OB \cdot OD$.

А.Заславский, М.Исаев, Д.Цветов

8. См. задачу М1975,б «Задачника «Кванта».

Призеры олимпиады

Дипломы I степени

по 9 классам получили

Ардинарцев Никита – Санкт-Петербург, ФМЛ 239, 8 кл.,
Сафин Станислав – Краснодар, лицей ИСТЭК;

по 10 классам –

Еремин Алексей – Краснодар, школа 47;

по 11 классам –

Трепалин Андрей – Долгопрудный, ФМШ 5,
Астахов Василий – Саратов, ФТЛ 1,
Белюсов Кирилл – Челябинск, ФМЛ 31,
Магазинов Александр – Ярославль, школа 33 им.К.Маркса.

Дипломы II степени

по 9 классам получили

Горинев Евгений – Киров, ФМЛ, 8 кл.,
Кевер Михаил – Санкт-Петербург, ФМЛ 239, 8 кл.,

Волков Владислав – Санкт-Петербург, ФМЛ 239, 8 кл.,
Есин Алексей – ст.Старонижестеблиевская Краснодарского кр., школа 55,

Илюхина Мария – Москва, лицей «Вторая школа»,
Лысов Михаил – Москва, лицей «Вторая школа»,
Митрофанов Иван – Коломна, гимназия 2,
Киселев Павел – Раменское, Раменская гимназия,
Стебелев Максим – Барнаул, лицей «Грани»,
Шмаров Владимир – Саров, лицей 15,
Лишанский Андрей – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Сидоров Александр – Санкт-Петербург, лицей «ФТШ»,
Ярушин Дмитрий – Челябинск, ФМЛ 31,
Остроумова Людмила – Ярославль, школа 33 им.К.Маркса,

по 10 классам –

Трифонов Иван – Ангарск, школа 10,
Дружинин Андрей – Иркутск, лицей 2,
Пантелеев Леонид – Киров, КЭПЛ,
Девятков Ростислав – Москва, лицей «Вторая школа»,

Климовский Арсений – Москва, СУНЦ МГУ,
Пономарева Елизавета – Москва, Московская государственная
 Пятдесят седьмая школа,
Козачок Марина – Долгопрудный, ФМШ 5,
Баранов Дмитрий – Жуковский, гимназия 1,
Матвеев Константин – Омск, лицей 66,
Дремов Виктор – Волгодонск, школа 24,
Глазман Александр – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Образцов Тимофей – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Столяров Дмитрий – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Ситников Александр – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Сахипов Рамиль – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Катышев Алексей – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Пикалов Павел – Екатеринбург, гимназия 9,
Красильников Александр – Ульяновск, гимназия 79,
Смотров Дмитрий – Челябинск, ФМЛ 31,
Иванов Григорий – Ярославль, лицей 2;

по 11 классам –

Ефимов Александр – Москва, Московская государственная
 Пятдесят седьмая школа,
Гаврилюк Андрей – Долгопрудный, ФМШ 5,
Калинин Никита – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Булиткин Даниил – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Подхалюзин Александр – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Козлов Павел – Ярославль, гимназия им. А.Л. Кекина.

Дипломы III степени

по 9 классам получили

Урбанович Тимофей – Иркутск, лицей 2,
Чувашов Сергей – Киров, ФМЛ,
Рогожников Алексей – Москва, Химический лицей 1303,
Махлин Игорь – Москва, гимназия 1543,
Лурье Денис – Жуковский, гимназия 1,

Борискин Павел – Саров, лицей 3,
Баранов Эдуард – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Логунов Александр – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Новикова Наталья – Ижевск, ИЕГЛ «школа-30»;

по 10 классам –

Тхоржевский Никита – Череповец, школа 34,
Хохуля Никита – Краснодар, лицей ИСТЭК,
Корнаков Илья – Москва, Московская государственная
 Пятдесят седьмая школа,
Белов Борис – Раменское, гимназия 2,
Музыка Степан – Черноголовка, школа 8,
Калинина Елена – Саров, лицей 3,
Рябенко Александр – Новосибирск, СУНЦ НГУ,
Хапланов Арсений – Ростов-на-Дону, ФМЛ 33,
Затицкий Павел – Санкт-Петербург, ФМЛ 239;

по 11 классам –

Шевяков Вадим – Сухиничи, школа 1,
Прохоренко Егор – Краснодар, гимназия 36,
Родионов Игорь – Фрязино, школа 1,
Кузьменко Юрий – Долгопрудный, ФМШ 5,
Севетюк Михаил – Нижний Новгород, школа 85,
Нетай Игорь – Ростов-на-Дону, школа 103,
Ананиевский Алексей – Санкт-Петербург, Аничков лицей,
Шмаков Кирилл – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Гимадеев Ренат – Казань, ФМЛ 131,
Тротин Николай – Магнитогорск, школа 65,
Ботов Михаил – Ярославль, школа 33 им. К.Маркса.

Публикацию подготовили
 Н.Агаханов, П.Кожевников, Д.Терёшин

XXXIX Всероссийская олимпиада школьников по физике

В этом году заключительный этап очередной Всероссийской физической олимпиады школьников прошел в Мордовии, в городе Ковылкино, что находится в 100 километрах от столицы республики.

В олимпиаде приняли участие 174 школьника 9–11 классов в составе команд от федеральных округов России и городов Москвы и Санкт-Петербурга.

Ниже приводятся условия задач теоретического и экспериментального туров заключительного этапа и список призеров олимпиады.

Теоретический тур

9 класс

Задача 1. Три резиновых шнура

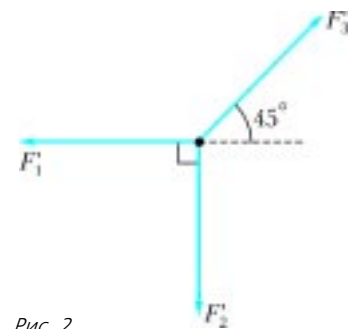
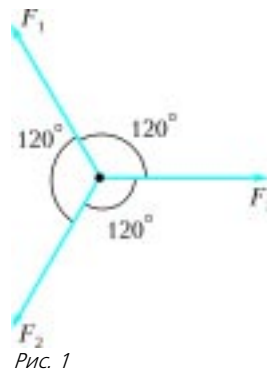
Три резиновых шнура связывают вместе и медленно растягивают в разные стороны (рис.1). В некоторый момент длины всех трех шнуров оказываются одинаковыми и равными $L_1 = 20$ см. Затем шнуры растягивают под другими углами (рис.2). В этом случае равенство длин шнуров наступает при длине $L_2 = 30$ см каждого из них. Известна

начальная длина самого длинного шнура в недеформированном состоянии: $l = 15$ см. Найдите длины двух других шнуров и отношение жесткостей шнуров. Считайте, что резиновые шнуры подчиняются закону Гука.

И.Иоголевич

Задача 2. Средняя скорость поезда

Поезд метро проходит расстояние s между станциями, разгоняясь с ускорением a до середины перегона и тормозя



с таким же по модулю ускорением на второй половине пути. В какой момент времени τ от начала движения средняя скорость поезда \bar{v} на пройденном участке пути максимальна? Найдите максимальное значение \bar{v}_{\max} этой скорости и расстояние l от начала пути, на котором оно достигается.

С.Кармазин

Задача 3. «Черный ящик»

В коробке («черном ящике») с четырьмя выводами находится четыре одинаковых резистора. С помощью омметра измеряется сопротивление между выводами 1 и 2 (рис.3). При этих измерениях поочередно соединялись накоротко выводы 1–3, 2–3 и 2–4. Результаты измерений следующие: $R_{13} = 3 \text{ Ом}$, $R_{23} = 3 \text{ Ом}$, $R_{24} = 4 \text{ Ом}$, $R_{00} = 4 \text{ Ом}$. Индексы указывают, какие выводы «черного ящика» были закорочены при данном измерении. Индекс «00» означает, что никакие два вывода не соединялись накоротко.

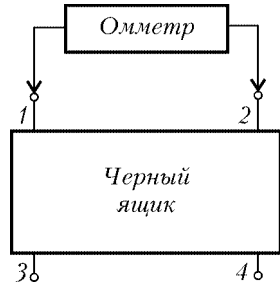


Рис. 3

Расшифруйте по этим данным схему «черного ящика» и определите сопротивление R резисторов, а также R_{14} и R_{34} .

С.Козел

Задача 4. Удельная теплоемкость свинца

На олимпиаде по физике участникам было предложено выполнить следующий эксперимент. Пенопластовый стакан емкостью V_0 , закрытый сверху пенопластовой крышкой, в которую вставлен термометр, заполнялся горячей водой, и по мере остывания воды снималась зависимость ее температуры T от времени t . Затем в стакан помещался кусок свинца плотностью $\rho = 11,3 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$ и объемом $V = V_0/2$, стакан доверху заполнялся горячей водой, и вновь снималась зависимость $T(t)$. Аккуратный ученик изобразил оба графика на одном листе миллиметровой бумаги (кривые 1 и 2 на рисунке 4). Принимая удельную теплоемкость воды равной $c_0 = 4,2 \cdot 10^3 \text{ Дж/(кг} \cdot \text{°C)}$, определите по этим экспериментальным кривым удельную теплоемкость s свинца. Плотность воды $\rho_0 = 1,0 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$. Теплоемкостью стенок стакана и крышки можно пренебречь. Температуру в комнате, где проводился эксперимент, считайте постоянной.

С.Козел

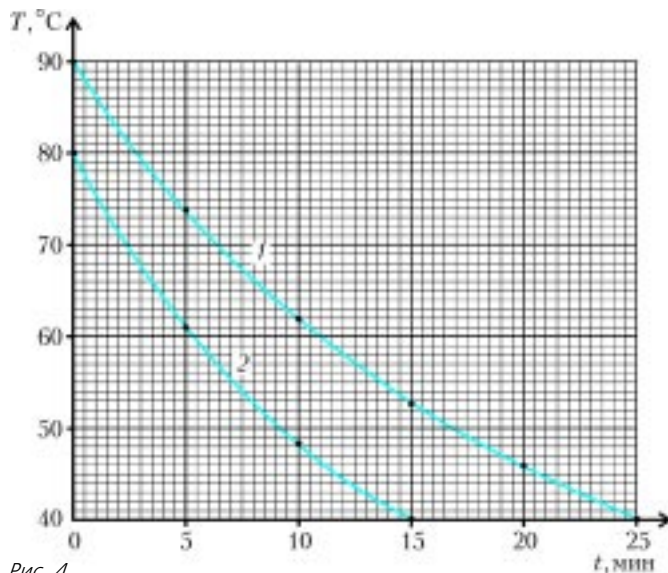


Рис. 4

Задача 1. Двойная звезда

Двойная звезда состоит из двух звезд, отстоящих на постоянное расстояние друг от друга. Космонавт Глюк решил вывести космический корабль на орбиту таким образом, чтобы он все время находился на отрезке, соединяющем звезды, был на постоянном расстоянии от каждой из звезд и расходовал при этом минимальное количество топлива. Проведя все расчеты, Глюк нашел, что корабль должен находиться на расстоянии l_1 от первой звезды и l_2 от второй, и успешно вывел корабль на орбиту. Чему равно отношение M_1/M_2 масс звезд?

С.Козел

Задача 2. Неквазистатические процессы

В цилиндре с теплонепроницаемыми стенками под массивным теплонепроницаемым поршнем находится идеальный одноатомный газ (рис.5). После того как система пришла в новое состояние термодинамического равновесия, гирию быстро сняли и вновь дождалась наступления равновесного состояния. Определите, какая температура газа T установится в цилиндре после четырех таких циклов, если первоначальная температура равнялась $T_0 = 300 \text{ К}$. Считайте, что трение между поршнем и стенками цилиндра пренебрежимо мало. Внешним давлением можно пренебречь.

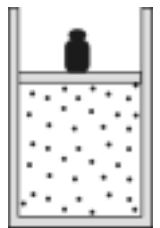


Рис. 5

В.Слободянин

Задача 3. Теплоемкость системы

В сосуде находятся гелий He и азот N_2 в количестве ν_1 и ν_2 молей соответственно. Сосуд разделен на две части пористой перегородкой Π (рис.6), которая свободно пропускает гелий и не пропускает азот, причем изначально азот был только в правой части. Пренебрегая теплоемкостью стенок сосуда и поршней, найдите теплоемкость системы при нагревании в следующих условиях: 1) при закрепленных поршнях; 2) при свободных поршнях, создающих постоянные давления; 3) при свободном левом поршне, создающем постоянное давление, и закрепленном правом поршне. Универсальная газовая постоянная R известна.

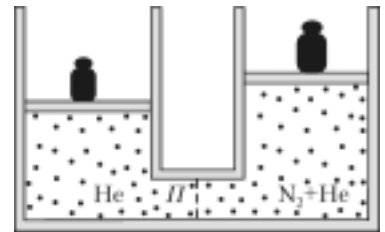


Рис. 6

О.Шведов

Задача 4. Периодическая подзарядка конденсатора

В цепи (рис.7) состояние ключа K периодически изменяют: замыкают на время τ , затем размыкают на время 2τ , снова замыкают на время τ и размыкают на время 2τ и так далее. Время τ достаточно мало, так что напряжение на конденсаторе большой емкости C не успевает за это время заметно измениться. После большого количества переключений напряжение на конденсаторе становится практически постоянным, совершая лишь небольшие колебания около своего среднего значения. Найдите в установившемся режиме: 1) среднее значение напряжения U на конден-

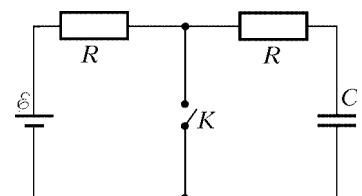


Рис. 7

саторе; 2) среднюю силу тока I , текущего через ключ; 3) отношение средних тепловых мощностей, выделяющихся на резисторах. ЭДС источника \mathcal{E} и сопротивление R каждого из резисторов известны.

Д.Александров

Задача 5. Сверхпроводящий соленоид и конденсатор

В некоторый момент сверхпроводящий соленоид объемом $V = 40 \text{ см}^3$ подключают к высоковольтному конденсатору емкостью $C = 100 \text{ мкФ}$, заряженному до напряжения $U = 1 \text{ кВ}$. Известно, что при индукции магнитного поля в соленоиде $B_0 = 1,6 \text{ Тл}$ разрушается состояние сверхпроводимости материала, из которого выполнена обмотка соленоида. Определите, произойдет ли разрушение сверхпроводимости в описанном эксперименте. Магнитная постоянная $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ единиц СИ.

С.Козел

11 класс

Задача 1. Из области фантастики

Предположим, что в результате какой-то космической катастрофы Луна остановилась в своем орбитальном движении вокруг Земли. Определите, какое время τ Луна будет падать на Землю и с какой относительной скоростью v они столкнутся. Расстояние от Земли до Луны $L = 3,84 \cdot 10^5 \text{ км}$, радиус Земли $R = 6370 \text{ км}$. Массу и размер Луны можно считать малыми по сравнению с массой и размером Земли.

С.Козел

Задача 2. Неквазистатические циклические процессы

В состоянии равновесия идеальный двухатомный газ занимает часть объема теплоизолированного сосуда с массивным теплоизолированным поршнем (см. рис. 5). На поршень поставили гирию. Когда система пришла в новое состояние термодинамического равновесия, оказалось, что давление газа возросло на 25%. Затем гирию быстро сняли и вновь дождались наступления равновесного состояния. Сколько таких циклов установки и снятия гири можно совершить, пока объем газа не увеличится вдвое при очередном удалении гири? Считайте, что трение между поршнем и стенками цилиндра пренебрежимо мало. Внешним давлением можно пренебречь.

В.Слободянин

Задача 3. Газ Клаузиуса

Разрабатывая кинетическую теорию газов, Клаузиус ввел в уравнение состояния идеального газа (в расчете на 1 моль) поправку b , которая имеет смысл собственного объема молекул газа: $p(V - b) = RT$. Процесс 1-2 (рис.8) производится сначала с одним молем идеального газа, а затем с одним молем газа Клаузиуса. Найдите разность ΔT максимальных температур газов в этих опытах, а также укажите, какая из них больше. Известно, что $p_0 = 1,51 \text{ МПа}$, $b = 44 \text{ см}^3/\text{моль} \ll V_0$, $R = 8,310 \text{ Дж}/(\text{моль} \cdot \text{К})$.

В.Слободянин

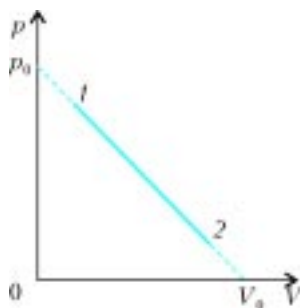


Рис. 8

Задача 4. Сверхпроводящий соленоид и источник

Сверхпроводящий соленоид длиной $l = 10 \text{ см}$ и площадью поперечного сечения $S = 1,6 \text{ см}^2$ имеет $N = 1000$ витков. В некоторый момент соленоид подключают к источнику с ЭДС

$\mathcal{E} = 24 \text{ В}$ и внутренним сопротивлением $r = 0,2 \text{ Ом}$. Известно, что при индукции магнитного поля $B_0 = 1,26 \text{ Тл}$ состояние сверхпроводимости обмотки соленоида разрушается. Определите, перейдет ли в этом эксперименте обмотка соленоида из сверхпроводящего в нормальное состояние и, если да, то через какое время после подключения, а если нет, то при какой ЭДС \mathcal{E} источника произошел бы переход. Магнитная постоянная $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ единиц СИ,

С.Козел

Задача 5. Фотоэффект

Цинковый шарик радиусом $R = 1 \text{ см}$ расположен в вакууме вдали от других тел и заряжен до потенциала $\phi_0 = -0,5 \text{ В}$ (полагая на бесконечности $\phi = 0$). Шарик осветили монохроматическим ультрафиолетовым светом с длиной волны $\lambda = 290 \text{ нм}$.

1) С какой максимальной скоростью v_1 вылетают фотоэлектроны из шарика?

2) Какую максимальную скорость v_2 будут иметь на большом расстоянии от шарика фотоэлектроны, вылетевшие из него в начале опыта?

3) Найдите потенциал ϕ_1 шарика после продолжительного облучения.

4) Какое число N фотоэлектронов покинут шарик при продолжительном облучении ультрафиолетом?

Красная граница фотоэффекта для цинка $\lambda_0 = 332 \text{ нм}$. Скорость света $c = 3,0 \cdot 10^8 \text{ м/с}$. Постоянная Планка $h = 6,63 \cdot 10^{-34} \text{ Дж/с}$. Электрическая постоянная $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м}$. Заряд электрона $e = -1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}$. Масса электрона $m = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ кг}$.

С.Козел

Экспериментальный тур

9 класс

Задача 1. Регулируемый «черный ящик»

В «черном ящике», имеющем 3 вывода, собрана электрическая цепь, состоящая из нескольких резисторов с постоянным сопротивлением и одного переменного резистора. Сопротивление переменного резистора можно изменять от нуля до некоторого максимального значения R_0 с помощью регулировочной ручки, выведенной наружу. С помощью омметра исследуйте схему «черного ящика» и, предполагая, что число находящихся в нем резисторов минимально,

1) изобразите схему электрической цепи, заключенной в «черном ящике»;

2) вычислите сопротивления постоянных резисторов и величину R_0 ;

3) оцените точность вычисленных вами значений сопротивлений.

Оборудование: «черный ящик»; омметр.

В.Слободянин

Задача 2. Лед с водой

Определите массовую долю льда в смеси льда и воды на момент выдачи.

Оборудование: смесь воды со льдом; термометр; часы.

Примечание: удельная теплоемкость воды $c = 4200 \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot ^\circ\text{C})$, удельная теплота плавления льда $\lambda = 335 \text{ кДж/кг}$.

Фольклор

10 класс

Задача 1. Колебания физического маятника

Стержень с двумя грузами A и B укреплен на горизонтальной оси и может совершать угловые колебания, т.е. представ-

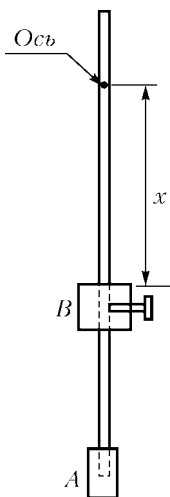


Рис. 9

ляет собой физический маятник (рис.9). Нижний груз *A* закреплен на стержне неподвижно, а верхний груз *B* может перемещаться и закрепляется на стержне с помощью винта.

1) Произведите измерения периода *T* малых колебаний такого маятника при различных положениях груза *B* (ниже и выше оси вращения), характеризуемых координатой *x*, отсчитываемой вниз от оси вращения.

2) Постройте на миллиметровой бумаге график зависимости $T(x)$ с указанием погрешностей измерений.

3) Снимите со стержня груз *B* и измерьте с возможно большей точностью период T_0 малых колебаний маятника без этого груза.

4) Отклоните маятник на угол $\sim 30^\circ$ (на глаз) и вновь измерьте период колебаний T_{30} . Найдите отношение $k = (T_{30} - T_0)/T_0$ в вашем эксперименте.

Оборудование: физический маятник с двумя грузами; секундомер; линейка; миллиметровая бумага.

Примечание: малыми колебаниями физического маятника называются колебания с угловой амплитудой, не превышающей $10-15^\circ$.

С.Козел

Задача 2. Бутылка с воздухом

1) Предположим, что давление воздуха в бутылке превышает атмосферное. Придумайте и изобразите схему установки для измерения избыточного давления воздуха в бутылке.

2) Соберите установку по созданию и измерению избыточного давления в бутылке. Проверьте герметичность установки.

3) С помощью собранной установки измерьте объем части бутылки, заполненной воздухом.

Оборудование: бутылка, частично заполненная водой;

полиэтиленовая прозрачная трубочка с иглой; шприц с иглой; сосуд с водой; штатив; доска; лист миллиметровой бумаги; пластилин; ножницы; скотч.

И.Андреев, С.Варламов

11 класс

Задача 1. Трансформатор

В коробке собрана цепь (рис.10). В цепь последовательно с резистором R_0 включена первичная обмотка маломощного трансформатора. Определите:

1) сопротивление r первичной обмотки на постоянном токе;

2) активное сопротивление R первичной обмотки на переменном токе частотой $f = 50$ Гц;

3) индуктивность L первичной обмотки;

4) тепловую мощность P , выделяющуюся в железном сердечнике трансформатора в условиях эксперимента.

Оборудование: электрическая цепь (см. рис.10); низковольтный источник тока частотой $f = 50$ Гц; резистор R_0 ; мультиметр; миллиметровая бумага.

С.Козел

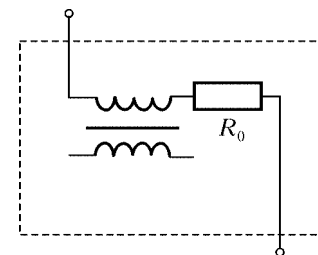


Рис. 10

Задача 2. Дифракционная решетка

Определите с наибольшей точностью период d дифракционной решетки.

Оборудование: дифракционная решетка; лазер с неизвестной длиной волны (лазерная указка); компакт-диск с шириной дорожки $d_0 = 1,6$ мкм; миллиметровая бумага; пластилин.

ВНИМАНИЕ: во избежание повреждения сетчатки не направляйте свет лазера в глаза; лазер следует включать только на время измерений.

С.Козел

Призеры олимпиады

Дипломы I степени

по 9 классам получили

Котов Андрей – Москва, Московская государственная Пятая-десять седьмая школа,

Кулиев Виталий – Киров, ФМЛ,

Соловьева Ксения – Пермь, школа 146,

Ефимов Сергей – Бийск, Бийский лицей,

Кузин Денис – Ельники, Ельниковский лицей,

Кострыгин Анатолий – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,

Андреев Андрей – Чебоксары, лицей 44,

Будкин Григорий – Санкт-Петербург, лицей «ФТШ»;

по 10 классам –

Рындин Максим – Березники, школа 3,

Зоркин Сергей – Иркутск, лицей ИГУ,

Мостовых Павел – Санкт-Петербург, школа 306,

Пьянков Андрей – Новокузнецк, лицей 84,

Занин Андрей – Тамбов, лицей 14;

по 11 классам –

Ерофеев Иван – Новосибирск, лицей 130,

Вдовин Валерий – Нижний Новгород, лицей 36,

Гущин Иван – Ярославль, школа 33 им. К.Маркса,

Арзамасов Вадим – Чебоксары, лицей 3,

Мозгунов Евгений – Сергиев Посад, ФМЛ,

Маркин Дмитрий – Москва, лицей «Вторая школа»,

Тимофеев Олег – Москва, СУНЦ МГУ,

Ахунзянов Руслан – Набережные Челны, гимназия 57,

Клюкин Станислав – Оренбург, гимназия 1.

Дипломы II степени

по 9 классам получили

Мыльников Дмитрий – Самара, школа 27,

Румянцев Артем – Воронеж, гимназия им. Н.Г.Басова при ВГУ,

Сидоров Александр – Санкт-Петербург, лицей «ФТШ»,

Шаповалов Артем – Старый Оскол, лицей 3,

Проскурин Михаил – Нижневартовск, лицей,

Суханов Илья – Саров, ФМЛ 15;

по 10 классам –

Артамонов Семен – Казань, лицей при КГУ,

Киселев Александр – Москва, школа 1189 им. И.В.Курчатова,

Светличный Павел – Волжский, школа 30,

Щепетильников Антон – Снежинск, гимназия 127,

Уваровский Алексей – Великий Устюг, Многопрофильный лицей,
Богер Евгений – Киров, ФМЛ,
Былинкин Александр – Снежинск, гимназия 127,
Капун Евгений – Санкт-Петербург, лицей «ФТШ»,
Федянин Дмитрий – Саратов, ФТЛ 1,
Лыков Антон – Москва, СУНЦ МГУ,
Марковцев Вадим – Сергиев Посад, ФМЛ;

по 11 классам –

Демин Дмитрий – Москва, СУНЦ МГУ,
Зернин Илья – Пермь, школа 146,
Малащенко Иван – Бийск, Бийский лицей,
Гусихин Павел – Казань, ФМЛ 131,
Корчагин Александр – Дубна, лицей «Дубна»,
Усков Евгений – Протвино, лицей,
Федотов Юрий – Тамбов, лицей 14,
Михайлов Андрей – Гагчина, лицей 3,
Полбин Андрей – Чебоксары, лицей 44,
Храмцов Алексей – Дубна, лицей «Дубна».

Дипломы III степени

по 9 классам получили

Дрожжин Александр – Саратов, Лицей прикладных наук,
Петухов Антон – Нижнекамск, школа 15,
Кононенко Даниил – Новосибирск, гимназия 1,
Рогожников Алексей – Москва, Химический лицей 1303,
Анисимов Андрей – Ноябрьск, школа 10,
Сальников Всеволод – Москва, лицей «Вторая школа»,
Константинов Роман – Обнинск, гимназия,
Сокко Анастасия – Долгопрудный, ФМШ 5;

по 10 классам –

Лисов Денис – Москва, лицей 1525 «Воробьевы горы»,
Попов Антон – Челябинск, лицей 31,
Афанасьев Александр – Владивосток, гимназия 1,
Федорцов Михаил – Тюмень, гимназия ТюмГУ,
Горбенко Виктор – Санкт-Петербург, лицей «ФТШ»,
Крыгин Михаил – Москва, лицей «Вторая школа»,
Ширинкин Аркадий – Пермь, школа 146;

по 11 классам –

Бочкарев Константин – Тюмень, гимназия ТюмГУ,
Гизатулин Денис – Владивосток, школа 23,
Гусев Олег – Химки, ФМШ 5,
Дородный Александр – Красноярск, лицей 8,
Киселев Юрий – Санкт-Петербург, лицей «ФТШ»,
Максименко Юлия – Саратов, ФТЛ 1,
Павловский Константин – Санкт-Петербург, лицей «ФТШ»,
Филатов Сергей – Черноголовка, школа 82,
Сафронов Павел – Санкт-Петербург, ФМЛ 30,
Смирнов Сергей – Москва, Московская государственная
 Пятьдесят седьмая школа,
Стомахин Алексей – Москва, Московская государственная
 Пятьдесят седьмая школа,
Ширяев Владимир – Новосибирск, СУНЦ НГУ,
Детярев Илья – Екатеринбург, СУНЦ УрГУ,
Воронина Людмила – Челябинск, лицей 31,
Мотузюк Артем – Дубна, лицей «Дубна»,
Тарнопольский Григорий – Ростов-на-Дону, гимназия 5.

*Публикацию подготовили
 С.Козел, В.Слободянин*

Международный турнир «Компьютерная физика»

Турнир «Компьютерная Физика» – часть программы Международного интеллект-клуба (МИК) «ГЛЮОН», проводимой с целью поиска, отбора и поддержки интеллектуально одаренных детей, проявляющих интерес к математике, физике и информатике. Уникальность этого турнира состоит в том, что все задачи предполагается решать с помощью численного моделирования на компьютере.

Для участия в турнире приглашаются команды школьников (5 человек), обладающих знанием физики и навыками работы на IBM PC. Турнир проводится в виде интеллектуального соревнования между командами в два тура – заочный и очный.

IX Турнир «Компьютерная физика»

Традиционно, заочный тур этого турнира начался в сентябре 2004 года рассылкой задания заочного тура по заявкам в лицеи, школы и гимназии. Шесть лучших команд были приглашены на финал турнира – очный тур соревнований, который проходил с 6 по 13 февраля 2005 года в городе Пущино на базе пансионата «Пущино». В проведении турнира приняли участие Пущинский научный центр РАН, Московский государственный университет им.М.В.Ломоносова и Межрегиональная ассоциация «Женщины в науке и образовании» при поддержке компаний «Физикон», «Кирилл и

Мефодий», «1С», фонда «Династия» и журнала «Квант».

Прежде всего состоялась защита задания заочного тура. Каждой команде было предложено выступить с докладом о своих результатах перед командами оппонентов и рецензентов. Научная дискуссия команд завершилась победой команды ФМЛ 1511 при Московском инженерно-физическом институте (МИФИ).

Подготовка к соревнованиям очного тура началась с лекции профессора МГУ А.М.Попова об основах физики колебаний, после которой команды получили задание очного тура. В течение последующих 36 часов школьники решали поставленную задачу. На защите очного задания отличилась команда ФМЛ 1580 при Московском государственном техническом университете (МГТУ) им.Н.Э.Баумана, представившая наиболее развернутое и глубокое решение и ставшая победителем этого тура.

По итогам двух туров абсолютным победителем турнира стала команда ФМЛ 1511 при МИФИ, получившая переходящий приз «Хрустальный глобус». Дипломами I степени и памятным значком были награждены команды ФМЛ 1511 при МИФИ и ФМЛ 1580 при МГТУ им.Н.Э.Баумана. Дипломы II степени получили команды Самарского медико-технического лицея (МТЛ) и Самарского аэрокосмического лицея, а дипломы III степени – гимназия 56 города Ижевска

и команда из Аничкова лицея города Санкт-Петербурга. Участникам соревнований было вручено множество призов от спонсоров и организаторов турнира.

В рамках турнира был проведен очередной конкурс компьютерного творчества, включающий четыре направления: разработка Интернет-сайта; компьютерное моделирование; прикладное программное обеспечение; презентации и дизайн, а также прошел конкурс «Виртуальная физическая лаборатория», разработанный компанией «Физикон». Четырнадцать команд из Москвы, Тольятти, Екатеринбурга, Ижевска, Самары и Казахстана соревновались за победу. Лучшей стала команда РЦ «ГЛЮОН» города Тольятти. В интеллектуальной командной компьютерной игре победителем в очередной раз стала команда МТЛ из Самары.

Заочный тур. «Электродинамика в микрополости»

Подробно о том, как стало возможным экспериментальное исследование взаимодействия отдельного атома, помещенного в полость малых размеров, с электромагнитным полем, возбуждаемым в полости внешним источником, рассказано в «Кванте» №5 за 2004 год. Здесь же мы напомним само задание и проведем его разбор.

Задание

1. Исследуйте динамику взаимодействия атома с единственной (основной) полевой модой $n = 1$ микрополости в резонансном случае ($\omega_{ат} = \omega_1 = \pi c/L$), а также в отсутствие резонанса ($\omega_{ат} \neq \omega_1$). Считайте, что в начальный момент времени атом находится в возбужденном состоянии (безразмерная амплитуда колебаний атомного электрона $\tilde{x}_0 = 1$), а электромагнитное поле отсутствует ($\epsilon = 0$). Размеры полости: $L = 1$ мкм, $S = 1$ мкм².

2. Пусть частота атомной системы близка или совпадает с частотой одной из полевых мод: $\omega_{ат} = \omega_{n_0}$ ($n_0 = 10$). Рассмотрите динамику атомной системы для различных значений размера микрополости L . Сколько полевых мод надо учитывать при моделировании? Проведите исследование в диапазоне $L = 1 - 100$ мкм при $S = 1$ мкм².

3. Запишите уравнения, описывающие поведение двух атомов в микрополости (считайте, что атомы между собой не взаимодействуют и могут обмениваться энергией только через электромагнитное поле). В условиях задания 2 рассмотрите особенности динамики системы двух одинаковых атомов в зависимости от соотношения начальных энергий возбуждения, а при одинаковых энергиях – от соотношения начальных фаз атомных осцилляторов.

Разбор задания

Рассмотрим простейшую механическую модель явления: два математических маятника – грузики массой m , висящие на длинной невесомой нерастяжимой нити длиной l , – связанные между собой пружиной жесткостью k . Будем считать, что пружина находится в ненапряженном состоянии, если оба маятника пребывают в положении равновесия.

Для малых углов отклонения систему уравнений движения маятников можно записать в виде

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt^2} + \omega_0^2 x_1 &= -\frac{k}{m}(x_1 - x_2), \\ \frac{dx_2}{dt^2} + \omega_0^2 x_2 &= \frac{k}{m}(x_1 - x_2), \end{aligned}$$

где $\omega_0^2 = g/l$ – квадрат частоты собственных колебаний маятников, а x_1 и x_2 – координаты первого и второго маятников. Эта система уравнений описывает связанные колебания. Ясно, что наличие связи обеспечивает обмен энергией между маятниками.

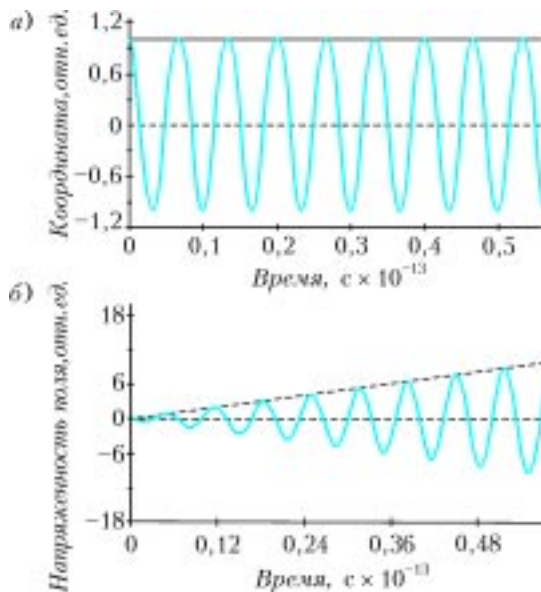


Рис. 1

По своей математической структуре эта система уравнений аналогична уравнениям, описывающим атом и электромагнитное поле в микрополости. Следовательно, похожими получатся и решения.

В простейшем случае взаимодействия атома с одной резонансной полевой модой в системе происходит колебательный процесс, сопровождающийся передачей энергии возбуждения от атома к электромагнитному полю и обратно. Начальная колебательная динамика атомной подсистемы представлена на рисунке 1,а, а полевой подсистемы – на рисунке 1,б.

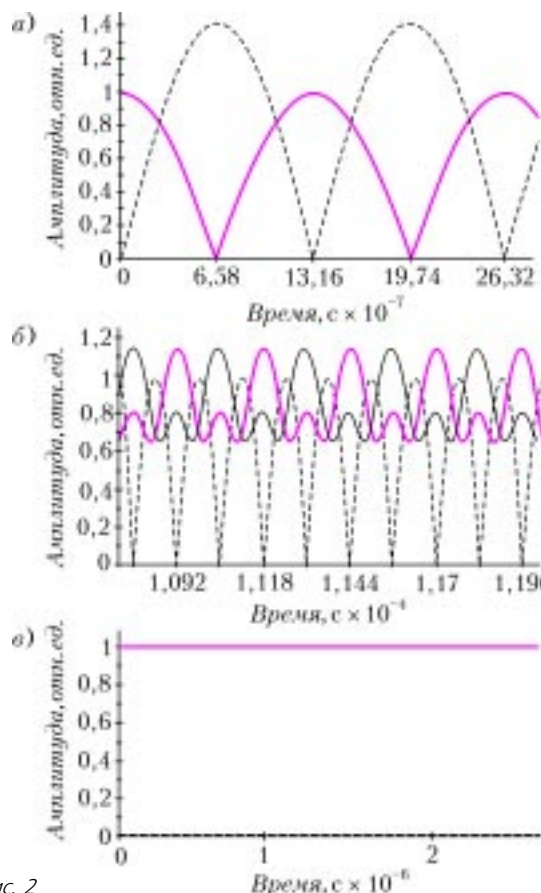


Рис. 2

На больших временах наблюдается модуляция амплитуд колебаний подсистем (биения), происходящая с частотой $\Omega = \alpha/\omega_{ат} \approx 3 \cdot 10^6 \text{ с}^{-1}$. В слабо нерезонансном случае $((\omega_{ат} - \omega_1)/\omega_{ат} \ll 1)$ биения также наблюдаются, однако они сопровождаются неполным перетеканием энергии от атома к полю и обратно. В случае сильного «нерезонанса» $((\omega_{ат} - \omega_1)/\omega_{ат} \sim 1)$ осцилляторы практически не взаимодействуют.

При увеличении размера микрополости наблюдается уменьшение расстояния между соседними полевыми модами, что постепенно приводит к необходимости учета взаимодействия атома сразу с несколькими полевыми модами. В случае наличия в микрополости двух атомов взаимодействие происходит через возбуждаемое ими электромагнитное поле и сопровождается перераспределением энергии в пределах системы. Если начальные значения энергии атомов одинаковы, временная динамика системы существенным образом зависит от соотношения начальных фаз атомных осцилляторов. Изменения амплитуд колебаний атомной и полевой подсистем во времени, рассчитанные для трех различных разностей фаз $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ ($0, \pi/2, \pi$), приведены на рисунке 2. Случай $\Delta\varphi = 0$ (см. рис.2,а) сопровождается наиболее эффективным возбуждением электромагнитного поля в полости, случай $\Delta\varphi = \pi$ (см. рис.2,б) описывает колебания атомов в противофазе, в результате чего электромагнитное поле в полости не возбуждается.

Решение представлено командой ФМЛ 1511 при МИФИ в составе: Блохин Юрий, Салахутдинов Сергей, Бураков Владимир, Щербина Лариса, Макаров Андрей.

Очный тур «Одномерный кристалл»

Простейшая модель твердого тела (кристалла) состоит в следующем: имеется цепочка атомов массой m , попарно взаимодействующих между собой с некоторой силой, зависящей от расстояния R между ними. Равновесное расстояние между атомами равно R_0 . В общем случае энергия взаимодействия атомов между собой определяется потенциалом Морзе

$$U(R) = D(1 - e^{-\alpha(R-R_0)})^2, \quad (1)$$

где D – это энергия разрыва связи между атомами, α – параметр потенциала Морзе.

При малых отклонениях от равновесия, когда выполняется условие

$$\alpha(R - R_0) \ll 1, \quad (2)$$

потенциал Морзе представляется в виде $U(R) = D\alpha^2(R - R_0)^2$, и величина действующей силы оказывается пропорциональной отклонению межатомного расстояния от равновесного значения, т.е. справедлив закон Гука. Приближенно можно говорить, что простейшая модель кристалла – это последовательность частиц, связанных между собой пружинками жесткостью

$$k = 2D\alpha^2.$$

Исследования физических процессов в кристаллах можно проводить в рамках рассмотренной модели. В состоянии термодинамического равновесия атомы совершают колебания вблизи положения равновесия, амплитуда которых определяется температурой системы. Для описания динамики движения атомов кристалла необходимо составить систему уравнений. Надо задать начальные условия для движения каждого атома, т.е. начальные смещения и скорости, так,

чтобы направления и величины скоростей давали полный импульс равным нулю.

Задание

1. Получите зависимость от времени кинетической и потенциальной энергий каждого атома в случае, когда начальные условия для колебаний атомов кристалла заданы в области справедливости закона Гука, т.е. когда выполняется условие (2). Объясните полученные результаты. Определите температуру системы.

2. Получите зависимость от времени кинетической и потенциальной энергий каждого атома в области ангармоничности потенциала Морзе. Определите температуру системы.

3. Предположите, что цепочка атомов состоит наполовину из атомов малой массы m , а наполовину из атомов большой массы M . Выполните для такого кристалла задание 1.

Рекомендуемые параметры:

число атомов в цепочке $n = 10 - 20$;

масса атома $m = 12 \text{ а.е.}$, где $1 \text{ а.е.} = 1,6 \cdot 10^{-24} \text{ г}$, $M = 10 m$;

кроме того, $R_0 = 2 \text{ \AA}$, где $1 \text{ \AA} = 10^{-8} \text{ см}$, $D = 4 \text{ эВ}$, где $1 \text{ эВ} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Дж}$, $\alpha = 10^7 \text{ см}^{-1}$.

Разбор задания

Уравнения, описывающие колебания атома в цепочке, записываются в виде

$$m \frac{d^2 x_i}{dt^2} = F_{i+1} + F_{i-1}, \quad i = 2, \dots, n-1, \quad (3)$$

где $F_{i\pm 1}$ – сила, действующая между i -м и $(i \pm 1)$ -м атомами. В случае первого и последнего атомов в правой части уравнения имеется только одно слагаемое. Выражение для силы получается в результате дифференцирования потенциала Морзе (1).

В гармоническом приближении уравнение (3) имеет вид

$$\frac{d^2 x_i}{dt^2} = -\frac{k}{m}(x_i - x_{i-1}) - \frac{k}{m}(x_i - x_{i+1}). \quad (4)$$

Здесь «-» определяется выражением (2), а координата каждого атома отчитывается от положения его равновесия.

Система уравнений (4) интегрировалась численно методом Эйлера, число атомов в кристалле изменялось от 10 до 400. Для описания динамики кристалла к уравнению (4) необходимо задать начальные условия. В случае если в начальный момент времени первый атом смещен из положения равновесия ($x_1 = R_0/2$), а остальные атомы находятся в положении равновесия (скорости всех атомов равны нулю), в цепочке атомов возбуждается волна, распространяющаяся от одного конца к другому и обратно (рис.3). Колебательное возмущение, распространяющееся по кристаллу, постепенно делокализуется, и возникают неупорядоченные колебания всей цепочки атомов. Система оказывается близка к состоянию «термодинамического равновесия». При этом средние значения кинетической энергии всех атомов равны. Кроме того, средние значения кинетической $\langle E_k(t) \rangle$ и потенциальной $\langle E_p(t) \rangle$ энергий атомов равны друг другу (рис.4)

В случае ангармонических колебаний в системе также устанавливается «термодинамическое равновесие», однако средние значения кинетической и потенциальной энергий атомов оказываются неравными друг другу.

Особенностью колебаний цепочки, состоящей из атомов разной массы, является то, что характерные амплитуды колебаний легких и тяжелых атомов существенно отличаются. Поскольку в процессе эволюции системы происходит установление «термодинамического равновесия», характер-

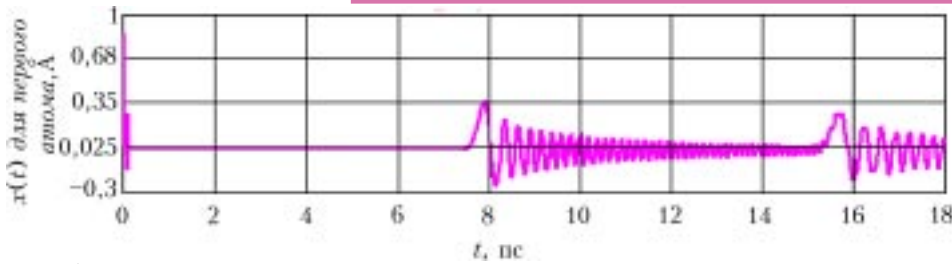


Рис. 3

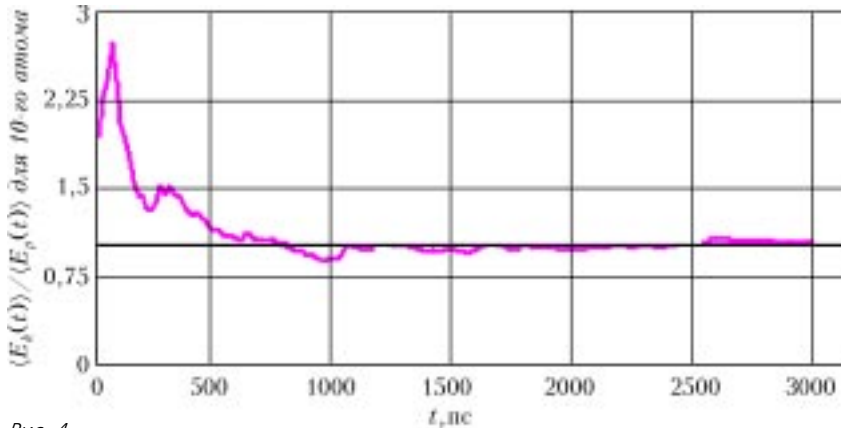


Рис. 4

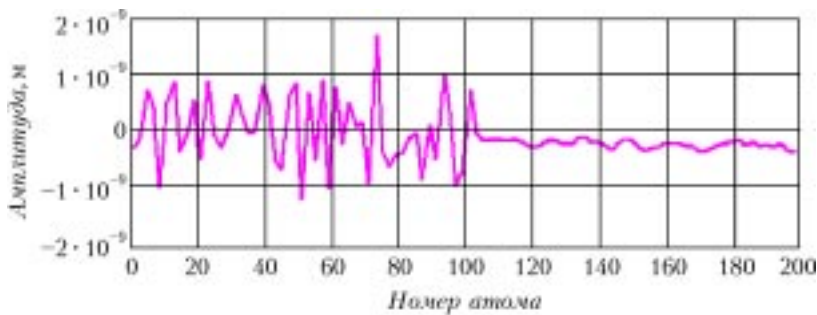


Рис. 5

ные амплитуды колебаний атомов разной массы находятся в соотношении $\sqrt{\frac{m}{M}}$ (рис.5).

Решение представлено командой лица 1580 при МГТУ им. Н.Э.Баумана в составе: Вельц Сергей, Быкадорова Наталья, Бузынин Николай, Глущенко Константин.

Х Турнир «Компьютерная физика»

Международный Интеллект-клуб «ГЛЮОН» приглашает региональные центры, гимназии и школы, работающие с одаренными детьми, принять участие в X Турнире «Компьютерная физика» в январе – феврале 2006 года в Дубне (Московская область).

Заявки на участие присылайте по адресу: 115522 Москва, Пролетарский пр., 15/2, МИК «ГЛЮОН».

Тел.: (095)517-8014, факс: (095)396-8227,
e-mail: gluon@yandex.ru (для информации см.
сайт: www.informika.ru/text/goscom/gluon).

Заочный тур. «Кинетика фазовых переходов»

При нагревании выше некоторой температуры любое вещество переходит в газообразное состояние. Это связано с тем, что, когда кинетическая энергия атомов или молекул вещества оказывается больше потенциальной энергии их взаимо-

действия, происходит разрыв межмолекулярных связей. Известно, что между молекулами инертных газов (молекулами, не обладающими дипольным моментом) на больших расстояниях действуют силы притяжения (силы Ван-дер-Ваальса), а на малых расстояниях они сменяются силами отталкивания.

Такое взаимодействие между атомами можно описать потенциалом Леннарда-Джонса

$$U(r) = -U_0 \left(\left(\frac{r_0}{r} \right)^6 - \left(\frac{r_0}{r} \right)^{12} \right), \quad (5)$$

где характерная величина r_0 определяется атомным размером: $r_0 \approx 1 - 4 \text{ \AA}$, а U_0 определяет глубину потенциальной ямы: для атомов инертных газов $U_0 \approx 0,05 - 0,02 \text{ эВ}$. Соотношение характерной величины кинетической энергии молекул ($\sim kT$) и глубины потенциальной ямы определяет фазовое состояние вещества.

Предлагается промоделировать фазовый переход между газообразным и конденсированным состояниями в ансамбле атомов, взаимодействующих по закону (5).

Рассмотрим двумерный газ, состоящий из n атомов массой m , находящийся в объеме $L \times L \times L$, где L – линейный размер. Потенциал взаимодействия (5) между каждой парой атомов i и j ($i, j = 1, \dots, n$) записывается в виде

$$U_{ij}(\vec{r}_i, \vec{r}_j) = -U_0 \left(\left(\frac{r_0}{r_{ij}} \right)^6 - \left(\frac{r_0}{r_{ij}} \right)^{12} \right),$$

где x_i, y_i и x_j, y_j – декартовы координаты i -го и j -го атомов, а $r_{ij} = |\vec{r}_i - \vec{r}_j| = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2}$.

Динамику атомов можно определить из решения системы уравнений Ньютона, описывающей движение совокупности атомов. Если считать, что столкновения со стенками являются абсолютно упругими, то система оказывается замкнутой, и через некоторое время, определяемое начальными условиями, в ней установится состояние термодинамического равновесия. Подвод (или отвод) энергии к системе, приводящий к нагреванию (охлаждению), можно осуществить, предполагая, что в процессе взаимодействия с одной или несколькими стенками происходит увеличение (уменьшение) скорости теплового движения атомов. Варьируя величину изменения абсолютного значения скорости при столкновении со стенкой, можно изменять скорость нагрева (охлаждения) газа. Альтернативный способ ввода энергии заключается в принудительном увеличении кинетической энергии одного или нескольких атомов.

Задание

1. «Равновесие». Исследуйте равновесные свойства системы (наличие одной или двух фаз) и соотношения количества атомов в этих фазах, а также температуру каждой из подсистем в зависимости от полной начальной энергии системы. Определите время выхода на состояние равновесия. Диапазон кинетических энергий частиц варьируйте от нуля до $10 U_0$. Скорость отвода (подвода) энергии в систему задайте, исходя из предположения, что при столкновении со стенкой энергия каждого сталкивающегося атома изменяется на величину $\Delta E = \zeta E$, где E – энергия атома до столкновения, а $\zeta = 0 - 0,3$.

2. «Испарение». Пусть в начальный момент времени система находится при почти нулевой температуре, т.е. в конденсированном состоянии. Расстояние между соседними атомами равно равновесному, определяемому потенциалом (5), а кинетическая энергия всех атомов много меньше глубины потенциальной ямы. Подводя энергию к системе одним из вышеописанных способов, исследуйте процесс фазового перехода конденсированное состояние – пар. Определите конечное фазовое состояние системы в зависимости от величины подведенной энергии и получите значение температуры каждой из фаз. Полное количество подведенной энергии задайте в диапазоне до $10U_0n$.

3. «Конденсация». Пусть в начальный момент времени газ

имеет температуру такую, что $kT \gg U_0$. Рассмотрите динамику перехода в конденсированное состояние в зависимости от скорости отвода тепла. Проанализируйте полученные зависимости температуры газообразной и конденсированной фаз от времени.

В качестве параметров используйте $r_0 = 4 \text{ \AA}$, $U_0/k = 200 \text{ К}$ (такие параметры приблизительно соответствуют потенциалу взаимодействия между атомами ксенона), масса атома составляет 130 атомных единиц. Считайте, что $L = 10^{-6} \text{ см}$, число частиц $n = 100$.

*Публикацию подготовили
В.Альмндеро, А.Попов, О.Поповичева*

XII Всероссийская заочная математическая олимпиада ШКОЛЬНИКОВ

Всероссийская школа математики и физики «АВАНГАРД» совместно с Министерством образования и науки РФ при участии журнала «Квант» проводит очередную Всероссийскую заочную математическую олимпиаду для школьников 6–10 классов. Срок проведения олимпиады октябрь–декабрь 2005 года.

Чтобы принять участие в олимпиаде, нужно в течение недели после получения этого номера журнала решить предлагаемые ниже задачи, аккуратно оформить решения (каждую задачу – на отдельном листочке) и отослать по адресу: 115446 Москва, а/я 450, ОРГКОМИТЕТ, «М-КВАНТ» – номер класса.

В письмо вложите два пустых маркированных конверта с надписанным домашним адресом.

Заметим, что для участия в олимпиаде необязательно решить все задачи – достаточно хотя бы одной. Победители олимпиады получают призы, среди которых несколько бесплатных подписок на журнал «Квант» (Оргкомитет приложит все усилия к тому, чтобы поощрения и призы получили все, приславшие хотя бы одно правильное решение.)

Все учащиеся, приславшие свои работы в Оргкомитет олимпиады, независимо от результатов их проверки получают приглашение учиться на заочном отделении Всероссийской школы математики и физики «АВАНГАРД» в 2005/06 учебном году.

Вниманию учителей математики 6–10 классов!

Пригласите к участию в олимпиаде своих учеников!

Задачи олимпиады

6 класс

1. В какое минимальное количество цветов можно раскрасить грани куба, чтобы соседние грани не были окрашены в одинаковый цвет?

2. Определите пропущенные числа и найдите сумму:

$$1 + 1 + 2 + 3 + 5 + \dots + 144 = ?$$

3. Известно, что сумма и произведение 2005 чисел, каждое из которых по абсолютной величине не превосходит 2005,

равны нулю. Какое максимальное значение может принять сумма квадратов этих чисел?

4. Докажите, что среди любых 11 целых чисел можно найти 2, разность которых делится на 10.

5. Докажите, что нельзя обойти конем шахматную доску с вырезанными полями a1 и h8, побывав на остальных полях ровно по одному разу.

7 класс

1. Известно, что для некоторой последовательности чисел a_1, a_2, \dots, a_n

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = n^2$$

для любого числа n . Найдите a_{2005} .

2. Докажите, что разность четырехзначного числа и числа, записанного теми же цифрами, но в обратном порядке, не может равняться 2005.

3. На сколько частей делят пространство продолженные плоскости граней правильного тетраэдра?

4. Изобразите на координатной плоскости Oxy множество точек, координаты которых при $0 \leq x \leq 3$ и $-1 \leq y \leq 1$ удовлетворяют соотношению

$$(y-x)(y+x)(y-x+2)(y-2+x)(x-3) \times \\ \times ((x-0,5)^2 + (y-0,25)^2) = 0.$$

5. См. задачу 5 для 6 класса.

8 класс

1. См. задачу 1 для 7 класса.

2. Можно ли завернуть в платок размером 3×3 куб со стороной 1, не разрезая платок?

3. На двух сторонах треугольника как на диаметрах построены круги. Докажите, что они полностью покрывают треугольник.

4. Решите в целых числах уравнение

$$(x^2 + y^2)(y^2 + z^2)(x^2 + z^2) = 650.$$

5. Изобразите на координатной плоскости Oxy множество точек, координаты которых удовлетворяют соотношению

нию

$$(x - |y|)(y^2 - x^2 + 4x - 4)(x - 3) \left((x - 0,5)^2 + (y - 0,25)^2 \right) = \\ = \sqrt{1 - y^2} - \sqrt{1 - y^2} + \sqrt{x} - \sqrt{x} + \sqrt{3 - x} - \sqrt{3 - x}.$$

9 класс

1. См. задачу 2 для 8 класса.
2. Дан равносторонний треугольник со стороной единица. В каком отношении делит площадь треугольника окружность с центром в одной из его вершин, проходящая через центр треугольника?
3. См. задачу 5 для 6 класса.
4. Функция $f(x)$ удовлетворяет условию

$$f(xy) = f(x)f(y) + f(x) - f(y) + f(x - y)$$

при всех x и y . Докажите, что $f(x) \geq 0$ при всех неотрицательных x .

5. Изобразите на координатной плоскости Oxy множество

точек, координаты которых удовлетворяют соотношению $((x - 0,5)^2 + (y - 0,5)^2)(x^2 - 2x + y^2)(x - 3) \times$
 $\times ((x^2 - 6x + y^2 + 8) + (|x - 3| + (x - 3))^2) = \sqrt{1 - y^2} - \sqrt{1 - y^2}.$

10 класс

1. Дан треугольник со сторонами 5, 12, 13. Найдите длины высот и медиан этого треугольника.
2. Избавьтесь от иррациональности в выражении $\sqrt{21 - 12\sqrt{3}}$.
3. В каких пределах может изменяться площадь пятиугольного сечения единичного куба?
4. См. задачу 4 для 9 класса.
5. Изобразите на координатной плоскости Oxy множество точек, координаты x и y которых таковы, что уравнение

$$2a^2 - 4a \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} + \cos(x-y) - \cos(x+y) = 0$$

относительно a имеет корни разных знаков.

РЕЦЕНЗИИ, БИБЛИОГРАФИЯ

Полезная книга по физике

В 2005 году издательство «Экзамен» выпустило второе издание, переработанное и дополненное, книги Ю.Г.Павленко «Начала физики». Книга предназначена для учащихся средних школ, лицеев, гимназий, преподавателей и абитуриентов. Основная цель книги – научить школьников активно применять теоретические основы физики как рабочий аппарат, позволяющий решать конкретные задачи и приобрести уверенность в самостоятельной работе.

Первое издание «Начал физики» увидело свет в 1988 году. Книга получила высокую оценку профессионалов – физиков физического факультета МГУ и преподавателей физики в школе. Очень скоро книга была переведена на болгарский и румынский языки. Из большого числа учебников и учебных пособий по физике книгу выделяет фундаментальный, глубокий и одновременно широкий подход к изложению материала. Автор демонстрирует эрудицию и истинное знание предмета, поскольку специальность доктора физико-математических наук, профессора Ю.Г.Павленко – теоретическая физика.

В основу второго издания «Начал физики» положен материал лекций, которые автор в течение пятнадцати лет читал учащимся Специализированного учебно-научного центра Московского государственного университета им. М.В.Ломоносова – школы им. А.Н.Колмогорова. В соответствии с современными тенденциями преподавания, основной акцент сделан на изучение фундаментальных законов и физических явлений, позволяющих раскрыть роль теории в практических приложениях и предсказании новых эффектов.

Каждый раздел первой (основной) части книги содержит полное изложение теоретического материала по всем темам программы физики средней школы. Кратко обсуждаются вопросы методического характера, связанные с корректным преподаванием физики. Подробно рассмотрены разделы программы, которые, как показала практика приемных экзаменов на естественные факультеты МГУ, наиболее слож-

ны для учащихся. Здесь же можно найти множество эссе, посвященных открытиям новых эффектов и законов, возникновению новых понятий и терминов, а также вкладу выдающихся ученых в развитие физики. Впервые в учебной литературе изложена летопись космической эры, история рождения Силиконовой долины, чипа, компьютера, знаменитой «мышь» и Интернета. Вторая часть книги, представляющая собой продолжение первой, включает «Дополнение», содержащее материал для читателей, которые собираются изучать естественные науки. При подготовке к участию в физических олимпиадах полезно познакомиться с такими разделами, как «Механика твердого тела», «Летучие локаторы», «Энтропия», «Электромеханика», «Трехфазный асинхронный двигатель», «Голография», «Ускорители элементарных частиц», «Эффекты теории относительности в электродинамике». Учащиеся физико-математических школ найдут здесь множество тем для докладов и рефератов.

В книге приведены решения более 450 примеров и задач, тесно связанных с теоретическим материалом. Некоторые из них предлагались на вступительных экзаменах по физике в различные вузы, другие составлены так, чтобы заинтересовать читателя, помочь ответить на многочисленные «почему», возникающие при знакомстве с различными явлениями природы и техническими приложениями физики, ввести в мир, где физические законы отражают не математические символы, а реальность.

Книга Ю.Г.Павленко «Начала физики» полностью автономна: ее можно использовать и для изучения физики, и при подготовке к выпускным и вступительным экзаменам, не прибегая к другим учебникам. По широте охвата материала можно судить по предметному указателю, содержащему 14 страниц. Изложение теоретических основ физики, широкого круга явлений, практических и научных приложений, несомненно, заинтересует как школьников, так и преподавателей физики.

В.Лобышев

(см. «Квант» №4)]

1. Профессор Мумбум–Плюмбум обречен на неудачу. Если медиана перпендикулярна основанию, то исходный треугольник этой медианой делится на два равных треугольника.

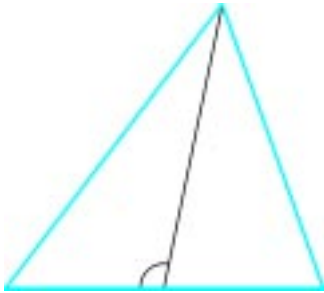


Рис. 1

В других случаях медиана делит исходный треугольник на два треугольника, у одного из которых имеется тупой угол, больший, чем любой угол второго треугольника (подумайте, почему – см. рис.1), поэтому эти два треугольника не могут быть между собой подобными.

2. Возможны следующие варианты троек различных цифр (с точностью до перестановки крайних цифр), у которых квадрат средней цифры равен произведению двух соседних с ней: 124, 139, 248, 469. Поскольку в номере телефона должны присутствовать три из таких комбинаций, то среди них обязательно должна находиться цифра 1. Несложно проверить, что комбинации 469 или 964 не подходят, а из оставшихся троек можно составить только следующие возможные сочетания: 842139 или 931248, причем сумма цифр и в том, и в другом случае равна 27. Поскольку искомый номер должен делиться и на 4, и на 9, то из оставшихся неиспользованных цифр 0, 5, 6, 7 подходит только цифра 0. На ноль домашний номер телефона начинаться не может, поэтому он должен стоять в конце. Привлекая признак делимости на 4, находим единственный возможный вариант: 9312480.

3. Обозначим первое число последовательности k , тогда условие задачи запишется так:

$$k + (k + 1) + \dots + (k + n) = (k + n + 1) + \dots + (k + 2n),$$

или

$$k = (k + n + 1 - k - 1) + (k + n + 2 - k - 2) + \dots + (k + 2n - k - n).$$

В каждой из n скобок, стоящих в правой части последнего равенства, стоит число n , поэтому $k = n^2$.

4. Обозначим через a совокупную массу гирек, которые во время первых двух взвешиваний находились на левой чашке весов, а через b – совокупную массу гирек, которые во время первых двух взвешиваний находились на правой чашке весов. Тогда схема первого взвешивания может быть записана так: $a + b = c + d$, а второго – так: $a + d = c + b$. Отсюда $a = c$, т.е. весы и в третий раз покажут равновесие.

5. Примем длину стороны одной клетки за 1. Тогда периметр фигуры, образованной первоначально покрашенными клетками, не превышает $7 \times 4 = 28$. Операция закрашивания отдельной клетки не может увеличить периметр

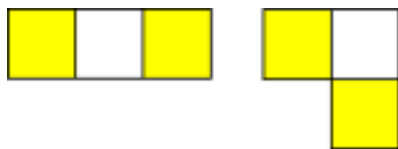


Рис. 2

закрашенной фигуры (рис.2), а периметр всего покрашенного квадрата 8×8 равен 32.

Следовательно, Петя никогда не сможет закрасить весь квадрат.

- 1.** Когда кипятик: чем выше температура тела, тем больше его излучательная способность.
- 2.** Модель абсолютно черного тела – это отверстие в закрытом сосуде.
- 3.** Зрачок представляет собой отверстие в радужной оболочке глаза, который поглощает практически все попадающие в него лучи.
- 4.** Да, установится. При этом все тела приобретут температуру оболочки, кроме зеркального – его температура будет близка к абсолютному нулю.
- 5.** Нет, нельзя. С повышением температуры будет расти излучение полости, пока она не станет терять столько энергии, сколько получает.
- 6.** Показание термометра зависит от излучения спутника, звезд, планет и самого термометра и равно его «равновесной» температуре, при которой равны испускаемые и поглощаемые термометром количества теплоты.
- 7.** Максимум энергии излучения при высокой температуре приходится на тепловые (инфракрасные) лучи, которые хорошо отражаются металлом.
- 8.** Черный уголь почти полностью поглощает видимый свет и при нагревании так же сильно его излучает; белый мел хорошо отражает свет, а при нагревании его излучение значительно слабее.
- 9.** Матовая – она лучше поглощает тепло, поэтому картофель испечется быстрее.
- 10.** По контрасту с окружающими его более светлыми предметами.
- 11.** Да, если рассматривать его в свете, из которого исключен желтый цвет (это на опыте проверил еще Ньютон).
- 12.** Если звезда горячее Солнца, то максимум ее излучения смещается в ультрафиолетовую область, и она кажется голубой. Если холоднее – максимум приходится на инфракрасную область, и она кажется красной или желтоватой. Если же максимум приходится на зеленый свет, как у Солнца, то в спектре излучения звезды присутствуют и все остальные цвета, создающие вместе ощущение белого цвета.
- 13.** Фиолетового, поскольку импульс фотона фиолетового цвета больше импульса фотона красного цвета.
- 14.** Луч лазера окажет большее давление на зеленое стекло, поглощающее фотоны красного цвета, чем на красное стекло, пропускающее их. А вот на зеленую бумагу, поглощающую фотоны красного цвета, луч лазера окажет меньшее давление, чем на красную, отражающую их.
- 15.** Зеленая растительность не поглощает инфракрасные лучи, а отражает и рассеивает их.
- 16.** Нет, поскольку действие лишь светового давления создало бы вращение в противоположную сторону. Наблюдаемый эффект связан с тем, что остаточное давление разреженного газа на зачерненные пластинки несколько выше, чем на зеркальные (из-за более высокой температуры).
- 17.** В принципе, может, если сила притяжения к Солнцу уравновесит силу светового давления.
- 18.** В случае а) пластинка будет отталкиваться по направлению падения света; в случае б) – по направлению нормали к ее поверхности.
- 19.** Момент силы светового давления на небольшой участок зеркальной поверхности равен нулю, в то время как момент силы светового давления на зачерненный участок стремится повернуть спутник зеркальной стороной к Солнцу.

Микроопыт

Темные поверхности лучше излучают инфракрасные лучи, поэтому в зачерненной банке вода остынет заметно быстрее.

Посмотрим сквозь линзу

1. $F = \sqrt{lL} \pm l$.
2. $F = a$.
3. Линза рассеивающая, ее фокусное расстояние равно $F = \frac{l\Gamma}{(1-\Gamma)^2} = 10$ см.
4. $\Gamma = 2$.
5. Мнимым.
6. $d = \frac{F(1+\sqrt{5})}{2}$.
7. $F = 0,15$ м.
8. $F = \frac{l^2 - L^2}{4l} = 24$ см.
9. $\Gamma = \frac{2\Gamma_1\Gamma_2}{\Gamma_1 + \Gamma_2} = 2,4$.
10. Возможны два решения: 5 или $\frac{1}{5}$.

XXXI Всероссийская олимпиада школьников по математике

Заключительный этап

9 класс

1. Построим биссектрису угла C и рассмотрим точку A' , симметричную A относительно этой биссектрисы (рис.3). Так как $CP = CQ$, то построенная биссектриса является серединным перпендикуляром к отрезку PQ . Значит, четырехугольник $PQA'A$ – равнобокая трапеция или прямоугольник, следовательно, A' лежит на описанной окружности ΔAPQ при любом положении точек P и Q , удовлетворяющем условию.

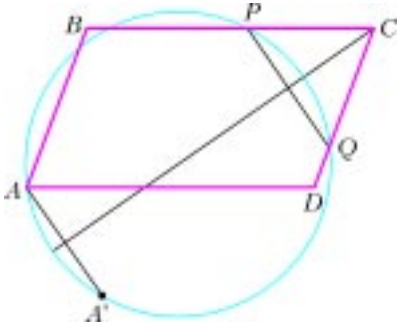


Рис. 3

2. Верно.
Предположим, что

Олег не сможет выбрать две требуемые клетки. Заменяем все числа на их остатки при делении на 4. В таблице окажется по 121 числу 0, 1, 2 и 3. Разобьем таблицу на 121 табличку 2×2 . В каждой такой табличке может стоять не более одного нуля и не более одной двойки. Следовательно, в каждой табличке стоит ровно один ноль и ровно одна двойка, причем оба оставшихся числа должны быть либо единицами, либо тройками. Тогда общее количество единиц четно. Противоречие.

3. Преобразуем условие:

$$\frac{a_1^2}{a_1 - 1} > S \Leftrightarrow a_1^2 > (a_1 + a_2 + a_3)(a_1 - 1) \Leftrightarrow a_1 + a_2 + a_3 > a_1(a_2 + a_3) \Leftrightarrow \frac{1}{a_2 + a_3} > \frac{a_1}{a_1 + a_2 + a_3}.$$

Сложив это неравенство с двумя аналогичными, получаем

$$\frac{1}{a_1 + a_2} + \frac{1}{a_2 + a_3} + \frac{1}{a_3 + a_1} > \frac{a_1 + a_2 + a_3}{a_1 + a_2 + a_3} = 1,$$

что и требовалось.

4. Может.

Лемма. Пусть за x рублей Вася смог выложить в нужном порядке на стол $N - 1$ карточку, где $N \leq 3^k$. Тогда он сможет добавить к выложенным карточкам еще одну, потратив при этом еще не более k рублей, т.е. затратив всего не более $x + k$ рублей.

Доказательство леммы проведем индукцией по числу k . База $k = 1$ очевидна. Пусть для всех $N \leq 3^{k-1}$ лемма доказана. Первый рубль Вася потратит на то, чтобы правильно расположить на столе N -ю карточку и карточки A и B , уже лежащие на местах $\left[\frac{N}{3}\right]$ и $\left[\frac{2N}{3}\right]$. Тогда N -я карточка попадет в одну из трех частей, на которые другие две карточки разбивают уже выложенную на стол последовательность. Но карточки A и B разбивают лежащую на столе последовательность $N - 1$ карточки на куски размером не более чем по $3^{k-1} - 1$ карточек. Значит, Васе осталось определить место карточки с номером N среди не более чем $3^{k-1} - 1$ карточек, потратив не более чем $k - 1$ рубль, а это можно сделать по предположению индукции. Таким образом, лемма доказана.

Теперь, используя лемму, подсчитаем Васины затраты на выкладывание всех 365 карточек. На выкладывание первых трех карточек Вася потратит 1 рубль. На добавление к ним карточек с номерами от 4 до 9 (всего 6 карточек) Вася потратит не более 2 рублей на каждую карточку. На карточки с 10 по 27 – не более 3 рублей на каждую, с 28 по 81 – не более 4 рублей, с 82 по 243 – не более 5 рублей и наконец на карточки с номерами от 244 до 365 – не более 6 рублей на каждую. Итого, Вася сможет выложить все карточки на стол в нужном порядке, потратив не более чем

$$1 + 6 \cdot 2 + 18 \cdot 3 + 54 \cdot 4 + 162 \cdot 5 + 122 \cdot 6 = 1845 < 2000 \text{ рублей.}$$

Таким образом, Вася сможет потратить не более 2000 рублей.

5. *Первое решение.* Утверждение верно, если все числа – рациональны. Пусть наше множество содержит иррациональное число a . Тогда каждое из остальных чисел имеет вид либо $p - a$, либо $\frac{p}{a}$, где p – рационально. Покажем, что чисел вида $p - a$ не больше двух. Пусть $b_1 = p_1 - a$, $b_2 = p_2 - a$, $b_3 = p_3 - a$, тогда $b_1 + b_2 = (p_1 + p_2) - 2a$ – не рационально, значит, $b_1 \cdot b_2 = p_1 p_2 - a(p_1 + p_2) + a^2$, а также $b_1 \cdot b_3$, $b_2 \cdot b_3$ – рациональны. Отсюда $A_3 = a^2 - a(p_1 + p_2)$, $A_2 = a^2 - a(p_1 + p_3)$, $A_1 = a^2 - a(p_2 + p_3)$ – рациональны, значит, $A_3 - A_2 = a(p_3 - p_2)$ – рационально, что возможно только при $p_3 = p_2$, т.е. $b_3 = b_2$ – противоречие.

Следовательно, чисел второго вида больше двух, пусть

$$c_1 = \frac{q_1}{a}, c_2 = \frac{q_2}{a}, c_3 = \frac{q_3}{a} \text{ – такие числа. Сумма } c_1 + c_2 = \frac{q_1 + q_2}{a} \text{ может быть рациональной только при } q_2 = -q_1. \text{ Но } q_3 \neq q_2, \text{ значит, сумма } c_1 + c_3 = \frac{q_1 + q_3}{a} \text{ иррациональна. Тогда число } c_1 \cdot c_3 = \frac{q_1 q_3}{a^2} \text{ – рационально, откуда } a^2 \text{ – рационально.}$$

Второе решение. Рассмотрим произвольные 6 чисел из нашего набора. Поставим этим 6 числам в соответствие граф следующим образом: у него шесть вершин, соответствующих нашим шести числам; вершины соединены синим ребром, если сумма соответствующих чисел рациональна, и соединены красным ребром, если произведение соответствующих чисел рационально. Хорошо известно, что в таком графе найдется одноцветный треугольник. Рассмотрим каждый из этих случаев.

1) Нашелся синий треугольник, т.е. нашлись три числа x, y, z такие, что $x + y, x + z, y + z$ рациональны. Но тогда, на-

пример, $(x + y) + (x + z) - (y + z) = 2x$ рационально, т.е. числа x, y, z рациональны. Тогда рассмотрим любое из оставшихся чисел t . Из рациональности любого из чисел xt и $x + t$ следует рациональность числа t (все числа по условию отличны от нуля), т.е. все числа набора рациональны.

2) Нашелся красный треугольник, т.е. нашлись три числа x, y, z такие, что xy, xz, yz рациональны. Но тогда, например, число $\frac{(xy)(xz)}{yz} = x^2$ рационально, т.е. числа x^2, y^2, z^2 рациональны. Если хотя бы одно из чисел x, y, z рационально, то аналогично предыдущему случаю получаем рациональность всех чисел набора. Пусть теперь $x = m\sqrt{a}$, где a рационально, $m = \pm 1$. Так как $xy = m\sqrt{ay} = b$ - рационально, то $y = \frac{b}{m\sqrt{a}} = \frac{b\sqrt{a}}{ma} = c\sqrt{a}$, где $c \neq m$, - рационально. Тогда рассмотрим любое из оставшихся чисел t . Если xt или yt - рационально, то аналогично предыдущему $t = d\sqrt{a}$, где d - рационально, т.е. t^2 - рационально.

Если же $x + t$ и $y + t$ - рациональны, то $(y + t) - (x + t) = (m - c)\sqrt{a}$ - рационально. Но $(x + t) - (y + t) = (m - c)\sqrt{a}$ - иррационально. Противоречие.

Таким образом, мы получили, что либо все числа набора рациональны, либо квадраты всех чисел набора рациональны, что и требовалось.

6. 1003.

Если $x_1 \leq x_2$ - корни уравнения, то $x_1, x_2 \in \mathbf{N}$ и $x_1 + x_2 = S(A), x_1 x_2 = S(B)$, поэтому

$$(x_1 + 1)(x_2 + 1) = S(B) + S(A) + 1 = 1 + 2 + 4 + \dots + 2^{2005} + 1 = 2^{2006}.$$

Значит, $x_1 + 1 = 2^k, x_2 + 1 = 2^{2006-k}$, где k может принимать значения 1, 2, ..., 1003.

Наоборот, пусть x_1, x_2 - числа такого вида, тогда они являются корнями уравнения $x^2 - px + q = 0$, где $p = 2^k + 2^{2006-k} - 2, q = 2^{2006} - 1 - p$. Но число p имеет единственное разложение в сумму различных степеней двойки (двоичное разложение), и в этом разложении степени двойки не превосходят 2^{2005} , а двоичное разложение q содержит 1 на тех местах, где у числа p - нули, так как $p + q = 2^{2005} - 1$. Итак, для каждого k такого, что $1 \leq k \leq 1003$, существует единственное разбиение (A, B) , дающее указанные корни x_1 и x_2 .

7. Пусть, для определенности, точка D лежит на дуге BC , не содержащей точки A (рис.4).

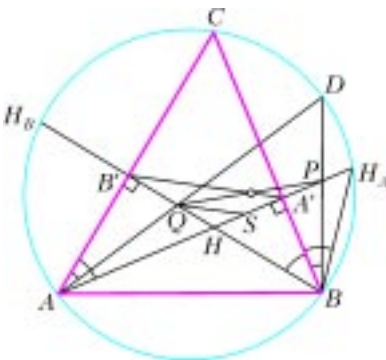


Рис. 4

содержащей точки A (рис.4). Обозначим через H точку пересечения высот треугольника ABC , а через H_A и H_B - вторые точки пересечения прямых AH и BH с окружностью.

Нетрудно доказать, что $H_A A' = H A', H_B B' = H B'$. Далее, так как $\angle B' A Q = \angle C A D = \angle C B D = \angle A' B P$, отрезки AQ и BP являются соответствующими в подобных треугольниках $AB'H$ и $BA'H_A$, и $\frac{B'Q}{B'H} = \frac{A'P}{A'H_A}$.

Построим на высоте AA' точку S такую, что $QS \parallel A'B'$. Из теоремы Фалеса вытекает, что отношение $\frac{A'S}{A'H}$ равно $\frac{B'Q}{B'H} = \frac{A'P}{A'H_A}$, а так как $H A' = H_A A'$, значит, $A'S = A'P$, и $\frac{B'Q}{B'H} = \frac{A'P}{A'H_A}$.

$A'B'$ - средняя линия треугольника PQS , т.е. делит пополам сторону PQ .

10 класс

1. 11.

Нетрудно проверить, что все числа, меньшие 11, представляются в нужном виде:

$$1 = \frac{4-2}{4-2}, 3 = \frac{8-2}{4-2}, 5 = \frac{16-1}{4-1} = \frac{2^5-2}{2^3-2}, 7 = \frac{16-2}{4-2},$$

$$9 = 2^3 + 1 = \frac{2^6-1}{2^3-1} = \frac{2^7-2}{2^4-2}, 2 = 2 \cdot 1 = \frac{2^3-2^2}{2^2-2}, \dots$$

$$\dots, 10 = 2 \cdot 5 = \frac{2^6-2^2}{2^3-2}.$$

Предположим, что $11 = \frac{2^a-2^b}{2^c-2^d}$. Можно считать, что $a > b, c > d$. Пусть $m = a - b, n = c - d, k = b - d$. Тогда

$$11(2^n - 1) = 2^k(2^m - 1).$$

Так как в левой части целое нечетное число, то $k = 0, a \neq 1$. Но при $m > n > 1$ левая и правая части дают разные остатки 1 и 3 при делении на 4. Противоречие.

Замечание. Можно прийти к противоречию по-другому. Из алгоритма Евклида следует, что $2^m - 1$ делится на $2^n - 1$ без остатка тогда и только тогда, когда m делится на n . Значит, надо доказать, что $11 \neq 1 + 2^n + 2^{2n} + \dots$. Но последнее очевидно, поскольку 11 не равно ни одному из чисел $1 + 2, 1 + 2 + 4, 1 + 4, 1 + 8$.

4. Пусть B_0, C_0 - середины сторон AC, AB соответственно, ω_A - третья вневписанная окружность, P и Q - точки пересечения ω'_B и ω'_C . Положим $AB = c, BC = a, CA = b$. Обозначим через $I_A, I_B, I_C, I'_B, I'_C$ центры окружностей $\omega_A, \omega_B, \omega_C, \omega'_B, \omega'_C$ соответственно. Обозначим также через D, E, F точки касания $\omega_A, \omega_B, \omega_C$ и сторон BC, CA, AB ; через E', F' - точки касания ω'_B, ω'_C и сторон CA, AB ; через X, Y - точки касания ω_A и продолжений сторон AB, BC соответственно (рис.5).

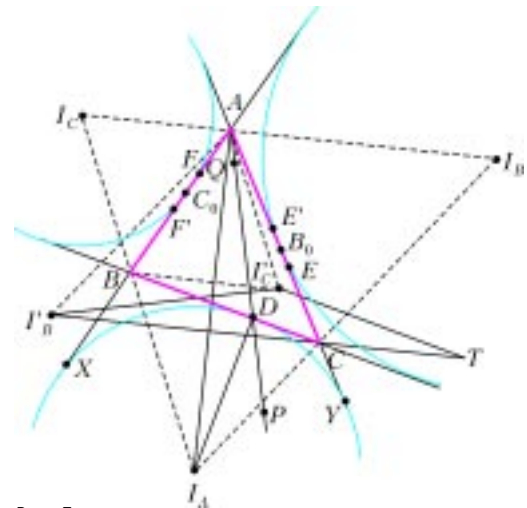


Рис. 5

Известно, что AD делит пополам периметр треугольника ABC (это следует из того, что $CD = \frac{a+c-b}{2}$). Поэтому достаточно показать, что 1) A лежит на PQ ; 2) $AD \perp I'_B I'_C$.

1) Ясно, что точки E и E' симметричны относительно B_0 . Следовательно, $AE' = CE = \frac{b+c-a}{2}$. Аналогично,

$AF' = \frac{b+c-a}{2}$. Получаем, что касательные к ω'_B и ω'_C , про-

веденные из точки A , равны. Поэтому A лежит на радикальной оси PQ окружностей ω'_B и ω'_C .

2) Из симметрии следует, что $AI'_B CI_B$ – параллелограмм, поэтому $\overline{I'_B C} = \overline{AI'_B}$. Аналогично, $AI'_C BI_C$ – параллелограмм, поэтому $\overline{BI'_C} = \overline{AI'_C}$. Построим такую точку T , что $BI'_C TC$ – параллелограмм. Получаем:

$$\overline{I'_C T} = \overline{BC}, \quad \overline{I'_B T} = \overline{I'_B C} + \overline{CT} = \overline{AI'_B} + \overline{I'_C A} = \overline{I'_C I'_B}.$$

Так как AI_A и $I_B I_C$ являются внутренней и внешней биссектрисами угла BAC , то $AI_A \perp I_B I_C$. Аналогично, $BI_B \perp I_C I_A$, $CI_C \perp I_A I_B$. Следовательно, $I_A B = I_A I_B \cos \angle I_B I_A I_C$, $I_A C = I_A I_C \cos \angle I_B I_A I_C$. Это означает, что $\Delta I_A B C \sim \Delta I_A I_B I_C$. Заметим, что $I_A D$ и $I_A A$ – соответствующие высоты в подобных треугольниках $I_A B C$ и $I_A I_B I_C$. Отсюда следует, что $\frac{I_A D}{I_A A} = \frac{BC}{I_A I_C}$.

Рассмотрим треугольники $I'_B I'_C T$ и $AD I_A$. Имеем:

$I'_B T \parallel I_B I_C \perp I_A A$, $I'_C T \parallel BC \perp I_A D$, $\frac{I'_C T}{I'_B T} = \frac{BC}{I_B I_C} = \frac{I_A D}{I_A A}$. Отсюда следует, что треугольники $I'_B I'_C T$ и $AD I_A$ подобны и их соответствующие стороны перпендикулярны. Итак, $I'_B I'_C \perp AD$.

Замечание. Вместо части 2) можно доказать, что D лежит на PQ следующим образом.

Пусть ω – вписанная окружность треугольника ABC . Нетрудно видеть, что ω касается AB и AC в точках F', E' соответственно. Обозначим через I центр ω , через D' – точку касания ω и BC . Обозначим через r, r_B, r_C радиусы окружностей $\omega, \omega_B, \omega_C$ соответственно. В окружности ω проведем диаметр SD' (рис.6). Гомотетия с центром A , переводящая ω_A в ω , переводит D в S . Поэтому достаточно доказать, что $S \in PQ$.

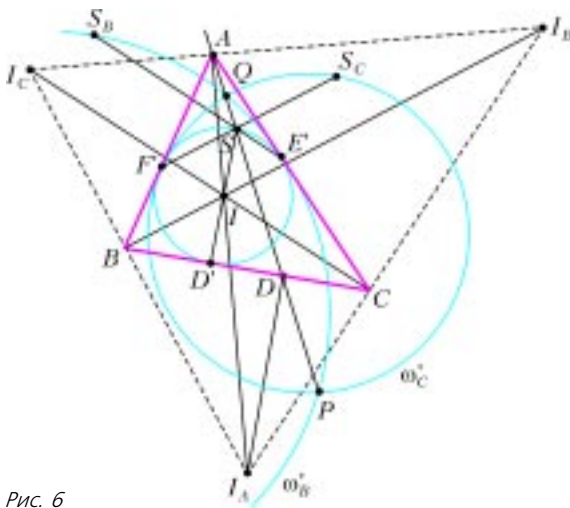


Рис. 6

Гомотетия с центром E' и коэффициентом $\frac{r_B}{r}$ переводит ω в ω'_B . Обозначим через S_B образ точки S при этой гомотетии, а через S_C – образ точки S при гомотетии с центром F' , переводящей ω в ω'_C . Достаточно показать, что $E'S \cdot SS_B = F'S \cdot SS_C$. Заметим, что

$$E'S \cdot SS_B = E'S \cdot (E'S_B - E'S) = E'S \left(\frac{r_B}{r} E'S - E'S \right) = \frac{r_B - r}{r} E'S^2.$$

Аналогично, $F'S \cdot SS_C = \frac{r_C - r}{r} F'S^2$. Чтобы завершить решение, установим, что

$$(r_B - r) E'S^2 = (r_C - r) F'S^2. \quad (1)$$

Четырехугольник $F'SE'D'$ вписанный, поэтому

$$\angle SE'F' = \angle SD'F' = \frac{\pi}{2} - \angle BD'F' = \frac{\angle B}{2}.$$

Аналогично, $\angle SF'E' = \frac{\angle C}{2}$. По теореме синусов

$$\frac{E'S}{F'S} = \frac{\sin \frac{\angle C}{2}}{\sin \frac{\angle B}{2}}. \quad (2)$$

Четырехугольник $BCI_B I_C$ вписанный, поэтому

$$\angle I_C I_B = \angle IBC = \frac{\angle B}{2}. \quad \text{Аналогично, } \angle I_B I_C = \frac{\angle C}{2}.$$

Заметим, что $IB = \frac{ID'}{\sin \frac{\angle B}{2}} = \frac{r}{\sin \frac{\angle B}{2}}$ и $I_B B = \frac{r_B}{\sin \frac{\angle B}{2}}$. Полу-

чаем $I_B I = I_B B - IB = \frac{r_B - r}{\sin \frac{\angle B}{2}}$. Аналогично, $I_C I = \frac{r_C - r}{\sin \frac{\angle C}{2}}$.

Из теоремы синусов

$$\frac{I_B I}{I_C I} = \frac{\frac{r_B - r}{\sin \frac{\angle B}{2}}}{\frac{r_C - r}{\sin \frac{\angle C}{2}}} = \frac{\sin \frac{\angle B}{2}}{\sin \frac{\angle C}{2}}. \quad (3)$$

Из (2) и (3) получаем (1).

5. 16.

Заметим, что если в строке a ладей, то в ней есть $(a - 1)$ пара ладей, которые бьют друг друга. Но тогда количество пар ладей, бьющих друг друга по горизонтали, не меньше чем число ладей минус число горизонталей, т.е. не меньше 8. Аналогично, количество пар ладей, бьющих друг друга по вертикали, не меньше 8.

Пример для 16 ладей получается, если, например, расставить по 8 ладей на главных диагоналях.

7. Латинские буквы далее обозначают целые числа.

Лемма 1. Если $a = \text{НОД}(t + 1, t^2 - t + 1)$, то $a = 1$ либо $a = 3$.

Доказательство. Поделив с остатком $t^2 - t + 1$ на $t + 1$, получаем $t^2 - t + 1 = (t - 2)(t + 1) + 3$. Из полученного равенства видим, что если d – общий делитель $t^2 - t + 1$ и $t + 1$, то d – делитель числа 3.

Аналогично, из равенства

$$t^4 - t^3 + t^2 - t + 1 = (t^3 - 2t^2 + 3t - 4)(t + 1) + 5$$

выводится еще одна лемма.

Лемма 2. Если $b = \text{НОД}(t + 1, t^4 - t^3 + t^2 + 1)$, то $b = 1$ либо $b = 5$.

Имеем $t^3 + 1 = (t + 1)(t^2 - t + 1) = 2x^2$, где $t = y^5$. Так как число $t^2 - t + 1$ всегда нечетно, то из леммы 1 следует, что либо $t + 1 = 2u^2$, $t^2 - t + 1 = v^2$, либо $t + 1 = 6u^2$, $t^2 - t + 1 = 3v^2$. Далее, при $x > 1$ имеем $t > 1$, откуда $(t - 1)^2 < t^2 - t + 1 < t^2$, и равенство $t^2 - t + 1 = v^2$ выполняться не может. Получаем $t + 1 = y^5 + 1 = 6u^2$. С другой стороны, $(y^5 + 1) - (y^3 + 1) = y^3(y - 1)(y + 1)$ делится на произведение $(y - 1)y(y + 1)$, и поэтому делится на 3. Таким образом, $y^3 + 1$ делится на 3, значит, $y^3 = 3m - 1$.

Теперь положим $z = y^3 = 3m - 1$, тогда $z^5 + 1 = (z + 1)(z^4 - z^3 + z^2 - z + 1) = 2x^2$. Если $z^4 - z^3 + z^2 - z + 1$ делится на 5, то все доказано. В противном случае из леммы 2 следует, что множители в равенстве взаимно просты. Поскольку $z^4 - z^3 + z^2 - z + 1$ всегда нечетно, получаем, что $z + 1 = 2u^2$, $z^4 - z^3 + z^2 - z + 1 = v^2$. Но так как $z = 3m - 1$, то

число в левой части последнего равенства при делении на 3 дает остаток 2, а число в правой части дает остаток 0 или 1 – противоречие.

Замечание. Уравнение

$$z^4 - z^3 + z^2 - z + 1 = v^2$$

имеет лишь 6 решений в целых числах: $(-3, \pm 11)$, $(0, \pm 1)$, $(1, \pm 1)$. В самом деле, при $z \neq 0$ имеем $(2z^2 - z)^2 < (2v)^2 < (2z^2 - z + 2)^2$, откуда $(2v)^2 = (2z^2 - z + 1)^2$ при целых z , что вместе с уравнением дает $z^2 + 2z - 3 = 0$. Получили $z = 1$ либо $z = -3$.

Ясно, что из этого замечания сразу получается еще одно решение задачи.

11 класс

1. 49.

Положим

$$f(x) = |x - a_1| + \dots + |x - a_{50}| - |x - b_1| - \dots - |x - b_{50}|.$$

Пусть $c_1 < c_2 < \dots < c_{100}$ – все числа из множества $\{a_1, \dots, a_{50}, b_1, \dots, b_{50}\}$, упорядоченные по возрастанию. На каждом из 101 промежутка $[-\infty; c_1], [c_1; c_2], \dots, [c_{99}; c_{100}], [c_{100}; +\infty)$ функция f линейна, а на первом и последнем из этих промежутков постоянна и не равна 0. Пойдем по числовой оси слева направо. Всякий раз, когда мы проходим одну из точек c_i , угловой коэффициент при раскрытии соответствующего модуля изменяется на ± 2 . Таким образом, он всегда равен четному целому числу и не может поменять знак, не обратившись перед этим в 0. Значит, угловые коэффициенты на любых двух соседних промежутках либо оба неотрицательны, либо оба неположительны, т.е. функция $f(x)$ на объединении этих промежутков либо неубывающая, либо невозрастающая. Стало быть, на каждом из 50 отрезков $[c_1; c_3], \dots, [c_{97}; c_{99}], [c_{99}; c_{100}]$ она имеет не более одного корня. Кроме того, на крайних интервалах значения имеют разные знаки, и в каждом корне знак функции меняется. Следовательно, количество корней нечетно и не превышает 49.

Нетрудно проверить, что если роль a_i будут играть числа 1, 4, 5, 8, ..., 97, 100, а роль b_i – числа 2, 3, 6, 7, ..., 94, 95, 98, $99\frac{1}{10}$, то уравнение $f(x) = 0$ будет иметь ровно 49 корней.

3. Через точки касания вневписанных окружностей A' и C' проведем перпендикуляры к соответствующим сторонам треугольника. Они пройдут через центры вневписанных окружностей (I_1 и I_3) и пересекутся в некоторой точке O (рис.7).

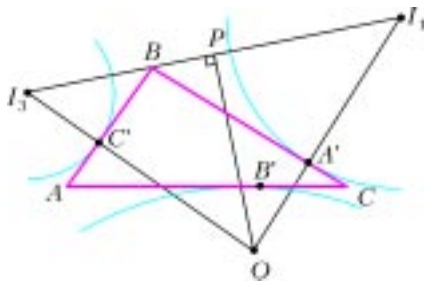


Рис. 7

Так как I_1 и I_3 находятся на внешней биссектрисе угла B , то $\angle ABI_3 = \angle CBI_1$. Из рассмотрения прямоугольных треугольников $I_1A'B$ и $I_3C'B$ следует, что $\angle BI_1A' = \angle BI_3C'$, значит, $\triangle OI_1I_3$ – равнобедренный. Обозначим середину отрезка I_1I_3 через P . Поскольку

$OI_1 = OI_3$, $OP \perp I_1I_3$. Рассмотрим окружность с диаметром OB . На ней лежат точки A' , C' и P , т.е. это окружность, описанная около $\triangle BA'C'$. Теперь достаточно доказать, что P лежит на описанной окружности $\triangle BA'C'$. Из этого будет следовать, что $P = B_1$, и $\triangle A_1B_1C_1$ – серединный треугольник для $I_1I_2I_3$, значит, его стороны параллельны внешним биссектрисам $\triangle ABC$. Но внешние биссектрисы параллельны сторонам треугольника, образованного точками касания вписанной окружности со сторонами $\triangle ABC$ (стороны этих треугольников перпендикулярны внутренним биссектрисам). Проведем из вершин A и C биссектрисы внутренних и внешних углов $\triangle ABC$ (рис.8). Как известно, две биссектрисы

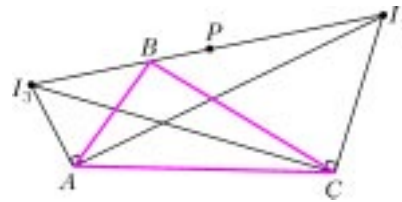


Рис. 8

одного угла перпендикулярны. Следовательно, точки I_1 , C , A , I_3 лежат на окружности с диаметром I_1I_3 и с центром в точке P . Рассмотрим центральный угол этой окружности – $\angle API_3$. Он опирается на дугу I_3A , не нее же опирается вписанный угол $\angle I_3CA = \frac{1}{2}\angle C$. Значит, $\angle I_3PA = 2\angle I_3CA = \angle C$. Из этого следует, что $\angle BPA = \angle BSA$, т.е. точки A, B, P, C лежат на одной окружности.

Замечание. Окружность, проходящая через A, B, C, P , является окружностью девяти точек для треугольника $I_1I_2I_3$.

4. Имеем $(z - 1)(z + 1) = x^y$, $\text{НОД}(z - 1, z + 1) = 1$ при нечетном x , $\text{НОД}(z - 1, z + 1) = 2$ при четном x . В первом случае $z - 1 = u^y$, $z + 1 = v^y$, где $u, v \in \mathbf{N}$; отсюда $v^y - u^y = 2$. Но, поскольку $v > u$, $y > 1$, имеем

$$v^y - u^y = (v - u)(v^{y-1} + \dots + u^{y-1}) \geq (v - u)(2^{y-1} + 1) \geq 3.$$

Противоречие: $2 \geq 3$. Значит, число x четно. В этом случае одно из чисел $z - 1$ и $z + 1$ делится на 2 и не делится на 4, а второе делится на $2^{\alpha y - 1}$ и не делится на $2^{\alpha y}$, где α – степень, в которой 2 входит в разложение x . Таким образом,

$A = 2u^y$, $B = 2^{\alpha y - 1}v^y$ (u, v – нечетные натуральные числа), где A и B равны, в некотором порядке, числам $z - 1$ и $z + 1$ (при этом $AB = x^y$). Получили $|2u^y - 2^{\alpha y - 1}v^y| = 2$, $|u^y - 2^{\alpha y - 2}v^y| = 1$. Отсюда, при некотором выборе знака, $u^y \pm 1 = 2^{\alpha y - 2}v^y$.

Заметим, что $u > 1$. В самом деле, если $u = 1$, то $A = 2$, $A = z - 1$, $z = 3$, $x = 2$ – противоречит условию. Кроме того, число y нечетно, в противном случае, если $y = 2n$, $z^2 - (x^n)^2 = 1$, что невозможно.

Лемма 1. Пусть $a \geq 2$, p – нечетное простое число. Тогда число $a^p - 1$ имеет хотя бы один простой делитель, не являющийся делителем числа $a - 1$.

Доказательство. Рассмотрим разложение

$$a^p - 1 = (a - 1)(a^{p-1} + a^{p-2} + \dots + a^2 + a + 1) = (a - 1)b.$$

Докажем вначале, что числа $a - 1$ и b не могут иметь общего делителя q , отличного от 1 и от p . Действительно, если $a - 1$ делится на q , то и $a^m - 1$ делится на q при любом натуральном m . Значит, $b = ql + p$, где l – некоторое целое число. Поэтому b делится на q лишь при $q = 1$ или p .

Таким образом, для завершения доказательства леммы оста-

лось рассмотреть случай, когда $b = p^n$ и $a - 1$ делится на p . Докажем, что этот случай невозможен. Поскольку $b > p$, достаточно доказать, что b не делится на p^2 . Докажем это. Если $a = p^\alpha k + 1$, где k не делится на p , то

$$a^p = (p^\alpha k + 1)^p = 1 + p^{\alpha+1}k + p \cdot \frac{p-1}{2} \cdot p^{2\alpha}k^2 + \dots = 1 + p^{\alpha+1}k + p^{\alpha+2}d,$$

где d целое. Отсюда $a^p - 1 = p^{\alpha+1}(k + pd)$. Поскольку k не делится на p , то очевидно, что b делится на p и не делится на p^2 . Лемма доказана.

Лемма 2. Пусть $a \geq 2$, p – нечетное простое число и выполнено хотя бы одно из неравенств $a \neq 2$ и $p \neq 3$. Тогда $a^p + 1$ имеет простой делитель, не являющийся делителем числа $a + 1$.

Доказательство. Рассмотрим разложение

$$a^p + 1 = (a + 1)(a^{p-1} - a^{p-2} + \dots + a^2 - a + 1) = (a + 1)b.$$

Докажем вначале, что числа $a + 1$ и b не могут иметь общего делителя r , отличного от 1 и от p . Действительно, если $a + 1$ делится на r , то и $a + 1$ делится на r при любом нечетном k ; если же $k = 2m$, то $a^k - 1$ делится на $a^2 - 1$, которое, в свою очередь, делится на r . Значит, $b = rl + p$, где l – некоторое целое число. Поэтому b делится на r лишь при $r = 1$ или p . Таким образом, для завершения доказательства леммы осталось рассмотреть случай $b = p^n$ и $a + 1$ делится на p . Докажем, что этот случай невозможен. Докажем вначале, что, как и в доказательстве леммы 1, $b > p$. Имеем $b \geq a^2 - a + 1 \geq a + 1 \geq p$. Из условий леммы следует, что среди неравенств этой цепочки есть строгие. С другой стороны, как и в доказательстве леммы 1, можно получить, что число b не делится на p^2 , что и завершает доказательство леммы.

Из доказанных лемм следует, что правая часть равенства $u^y \pm 1 = 2^{\alpha y - 2} v^y$ имеет не менее $q + 1$ различных простых делителей. Поскольку $\text{НОД}(u, 2v) = 1$, $u > 1$, получаем отсюда неравенство задачи.

Замечание. Фактически мы доказали следующее, более сильное, чем утверждение задачи, предложение.

Предложение. Пусть число y разлагается в произведение n отличных от 1 натуральных чисел. Тогда x имеет не менее $n + 2$ различных простых делителей.

Значительное усиление результата задачи можно будет найти в “Кванте” №1 за 2006 год.

5. Не существует.

Возьмем произвольно $x_1 \neq 0$ и положим $y_1 = \frac{1}{x_1}$. Тогда

$$f^2(x_1 + y_1) \geq f^2(x_1) + 2f(1) + f^2(y_1) \geq f^2(x_1) + a,$$

где $a = 2f(1) > 0$. Будем далее выбирать $x_n = x_{n-1} + y_{n-1}$,

$y_n = \frac{1}{x_n}$, $n \geq 2$. Тогда

$$f^2(x_n + y_n) \geq f^2(x_n) + a = f^2(x_{n-1} + y_{n-1}) + a \geq f^2(x_{n-1}) + 2a \geq \dots \geq f^2(x_1) + na.$$

Ясно, что последовательность $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n), \dots$ неограничена.

6. Нельзя.

Предположим, что это возможно. Заметим, что два из рассматриваемых параллелепипедов пересекаются тогда и только тогда, когда их проекции на все три оси координат пересекаются.

Рассмотрим 4 пары параллелепипедов: P_1 и P_2 , P_4 и P_5 , P_7 и P_8 , P_{10} и P_{11} . Если взять параллелепипеды из разных пар, то они пересекаются, значит, их проекции на любую ось

пересекаются. Пары параллелепипедов из одной пары поставим в соответствие ось координат (одну из осей, если таковых несколько), на которую проекции этих параллелепипедов не пересекаются. Поскольку пар 4, а осей 3, найдутся две пары (скажем, P_1 и P_2 , P_4 и P_5), которым сопоставлена одна и та же ось Ox .

Пусть отрезки S_1, S_2, S_4, S_5 – проекции P_1, P_2, P_4, P_5 соответственно на ось Ox (пусть A_i – левые концы отрезков S_i , а B_i – правые). Известно, что отрезки в парах S_1 и S_2, S_4 и S_5 не пересекаются, а в любых других парах – пересекаются. Не ограничивая общности, можем считать, что $A_1 < B_1 < A_2 < B_2$ и $A_4 < B_4 < A_5 < B_5$. Так как S_1 пересекается с S_5 , то $A_5 < B_1$. Но тогда $B_4 < A_2$, и отрезки S_2 и S_4 не пересекаются. Противоречие.

Замечание. Ответ в соответствующей задаче для 10 параллелепипедов также отрицательный, а для 9 параллелепипедов – положительный.

7. Пусть X и Y – середины AB и CD соответственно (рис.9), AB и CD пересекаются в точке P (пусть, для определенности, P – точка пересечения лучей AB и DC).

Предположим, что O – точка пересечения средних линий четырехугольника $ABCD$.

Тогда O – середина отрезка XY , так как середины сторон четырехугольника – вершины параллелограмма. Далее, PO – биссектриса и медиана в треугольнике XPY , поэтому он равнобедренный и

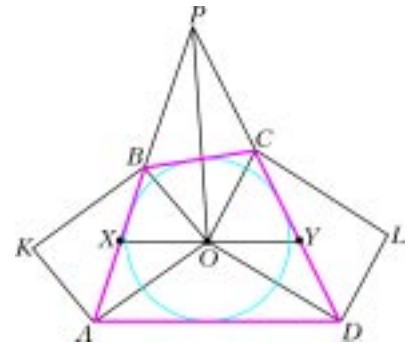


Рис. 9

$$\begin{aligned} \angle XBO + \angle YCO &= \frac{1}{2}(\angle ABC + \angle BCD) = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle BPC) = \\ &= \angle PXY = \angle XBO + \angle XOB, \end{aligned}$$

поэтому $\angle YCO = \angle XOB$, и треугольники OXB и COY подобны. Следовательно, $\frac{OB}{OC} = \frac{XB}{YO}$. Аналогично,

$$\frac{OA}{OD} = \frac{XA}{YO} = \frac{XB}{YO},$$

откуда следует $OA \cdot OC = OB \cdot OD$. Пусть теперь $OA \cdot OC = OB \cdot OD$. Заметим, что

$$\begin{aligned} \angle AOB + \angle COD &= \\ &= (180^\circ - \angle OAB - \angle OBA) + (180^\circ - \angle OCD - \angle ODC) = \\ &= 360^\circ - \frac{1}{2}(\angle DAB + \angle ABC + \angle BCD + \angle CDA) = 180^\circ. \end{aligned}$$

Поэтому, если достроить треугольники OAB и OCD до параллелограммов $OAKB$ и $OCLD$, то эти параллелограммы будут подобны (поскольку $\frac{OA}{AK} = \frac{OB}{OB} = \frac{OD}{OC}$).

Тогда треугольники OXB и COY также подобны, поскольку они соответствуют друг другу при подобии параллелограммов. Отсюда

$$\angle XOB = \angle OCY = \angle OCB \text{ и } \angle COY = \angle XBO = \angle OBC.$$

Следовательно,

$$\angle XOB + \angle BOC + \angle COY = \angle OCB + \angle BOC + \angle OBC = 180^\circ,$$

т.е. точка O лежит на прямой XY . Аналогично, O лежит на прямой, соединяющей середины двух других сторон четырехугольника, что и требовалось.

XXXIX Всероссийская олимпиада школьников
по физике

Теоретический тур

9 класс

$$1. k_1 = k_2, \quad \frac{k_3}{k_1} = \frac{L_2 - L_1}{(L_2 - l)/\sqrt{2} - (L_1 - l)} \approx 1,78;$$

$$l_1 = l_2 = L_1 - \frac{k_3}{k_1}(L_1 - l) \approx 11,1 \text{ см}.$$

$$2. \tau = \sqrt{2s/a}; \quad \bar{v}_{\max} = (2 - \sqrt{2})\sqrt{as}, \quad l = 2(\sqrt{2} - 1)s \approx 0,83s.$$

3. Возможны две схемы «черного ящика». Для первой из них (рис.10) $R = 6 \text{ Ом}$, $R_{14} = 2,4 \text{ Ом}$, $R_{34} = 3,6 \text{ Ом}$. Для вто-

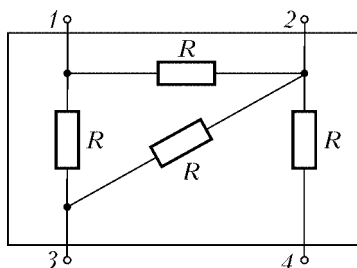


Рис. 10

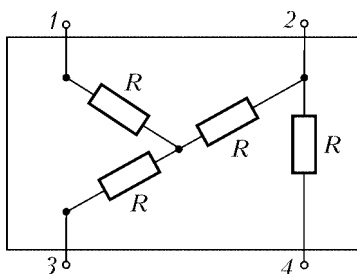


Рис. 11

рой (рис.11) $R = 2 \text{ Ом}$, $R_{14} = \frac{4}{3} \text{ Ом}$, $R_{34} = \frac{10}{3} \text{ Ом}$.

$$4. c = (0,13 \pm 0,01) \cdot 10^3 \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot ^\circ\text{C}).$$

10 класс

$$1. \frac{M_1}{M_2} = \frac{(l_1 + l_2)^3 - l_2^3 l_1^2}{(l_1 + l_2)^3 - l_1^3 l_2^2}; \text{ можно показать, что рассмотренная}$$

орбита является неустойчивой, поэтому потребуется небольшой дополнительный расход топлива на ее регулярную корректировку.

$$2. T = \left(\frac{28}{25}\right)^4 T_0 \approx 472 \text{ К}.$$

$$3. C_1 = R\left(\frac{3}{2}v_1 + \frac{5}{2}v_2\right); \quad C_2 = R\left(\frac{5}{2}v_1 + \frac{7}{2}v_2\right);$$

$$C_3 = R\left(\frac{5}{2}v_1 + \frac{5}{2}v_2\right).$$

$$4. U = \frac{\mathcal{E}}{2}; \quad I = \frac{\mathcal{E}}{2R}; \quad \frac{P_1}{P_2} = 3.$$

5. Да, произойдет.

11 класс

$$1. \tau = \frac{\pi L}{2R} \sqrt{\frac{L}{2g}} \approx 4,19 \cdot 10^5 \text{ с} \approx 4,85 \text{ сут.};$$

$$v = \sqrt{2gR\left(1 - \frac{R}{L}\right)} \approx \sqrt{2gR} \approx 11,2 \text{ км/с}.$$

$$2. n = \frac{\ln 2}{\ln(99/98)} \approx 68.$$

$$3. \Delta T = T_{\text{ид}} - T_{\text{К}} \approx \frac{p_0 b}{2R} \approx 4,0 \text{ К}.$$

$$4. \text{ Да, перейдет; } t_0 = -\frac{\mu_0 S N^2}{lr} \ln\left(1 - \frac{B_0 lr}{\mu_0 N \mathcal{E}}\right) \approx 18 \text{ мс}.$$

$$5. v_1 = \sqrt{\frac{2E_{k \max}}{m}} = \sqrt{\frac{2hc}{m}\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda_0}\right)} \approx 4,37 \cdot 10^5 \text{ м/с};$$

$$v_2 = \sqrt{\frac{2E_{k \max} + e\varphi_0}{m}} = 6,05 \cdot 10^5 \text{ м/с};$$

$$\varphi_1 = -\frac{E_{k \max}}{e} = 0,54 \text{ В};$$

$$N = \frac{4\pi\epsilon_0}{-e} R(\varphi_1 - \varphi_0) \approx 7,2 \cdot 10^6.$$

Информацию о журнале «Квант» и некоторые материалы из журнала можно найти в ИНТЕРНЕТЕ по адресам:

Редакция журнала «Квант»

kvant.info

Московский центр непрерывного математического образования

kvant.mccme.ru

Московский детский клуб «Компьютер»

math.child.ru

Костромской центр дополнительного образования «Эврика»

ceemat.ru

журнал ©
Квант

НОМЕР ПОДГОТОВИЛИ

**А.А.Егоров, С.П.Коновалов,
А.Ю.Котова, В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан**

НОМЕР ОФОРМИЛИ

**В.Н.Власов, Д.Н.Гришукова, А.Е.Пацхверия,
Е.А.Силина**

ХУДОЖЕСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР

Е.В.Морозова

КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРУППА

Е.А.Митченко, Л.В.Калиничева

Журнал «Квант» зарегистрирован в Комитете РФ
по печати. Рег. св-во №0110473

Адрес редакции:

119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант»;

тел.: 930-56-48;

e-mail: admin@kvant.info, math@kvant.info,

phys@kvant.info

Диaposитивы изготовлены ООО «Европолиграфик»

Заказ №

Отпечатано на ГУ РПП, г. Ржев, ул. Урицкого, 91

При участии ЗАО «РИЦ «Техносфера»,
тел.: (095) 234-01-10

Вундеркинды, К ДОСКЕ!

Мы уже рассказали о самых знаменитых шахматных вундеркиндах – Хосе Рауле Капабланке, Самуэле Решевском, Борисе Спасском, Роберте Фишере и Юдит Полгар. Можно еще вспомнить о Мексинге, Шорте и Камском, которые еще в школьные годы проявили свой незаурядный талант, успешно играли в гроссмейстерских турнирах. А в 1994 году новую планку в «вундеркиндстве» задал венгерский школьник Петер Лeko. Он первым в истории стал гроссмейстером в 14 лет. А всего в мире восемь вундеркиндов, завоевавших высшее шахматное звание в 14 лет или даже раньше. Все они перечислены в таблице (в конце каждой строки указан возраст, когда вундеркинд стал гроссмейстером).

Про Петера Лeko мы хорошо знаем, ведь в прошлом году он чуть не стал чемпионом мира – его поединок за шахматную корону с Владимиром Крамником закончился вничью. Этьен Бакро прославился еще в 1996 году, когда разгромил в показательном матче экс-чемпиона мира Василия Смыслова – 5:1! Руслан Пономарев в 2002 году стал чемпионом мира в 18 лет, на четыре года улучшив достижение Гарри Каспарова. Вот эффектная партия, сыгранная 15-летним Русланом.

Пonomарев – Тукмаков

Донецк, 1998

Защита Каре-Кани

1. e4 c6 2. d4 d5 3. ♖c3 de 4. ♜:e4 ♠f5 5. ♜g3 ♠g6 6. h4 h6 7. ♜f3 ♜f6 8. ♜e5 ♠h7 9. ♠d3 ♠:d3 10. ♝:d3 e6 11. ♠f4 ♜bd7 12. 0-0-0 ♠e7 13. ♜b1! Смысл восклицательного знака станет ясен чуть позже. 13...0-0 14. e4 e5 15. d5 ♜:e5 16. ♠:e5 ♜g4.

Любопытно, что эта позиция – с той разницей, что вместо ♜c1-b1 было сыграно h4-h5 – встретилась намного раньше в партии Карпов – Хьюбер (Тилбург, 1982). Белые тогда сыграли 17. ♠:g7, и после 17... ♜:g7? 18. ♝e2 ♠g5+ 19. ♜b1 ♜f6 20. de ♝c8 21. e7

Таблица

Вундеркинд	Страна	Год рождения	Гроссмейстер
1. Лeko Петер	Венгрия	1979	14
2. Бакро Этьен	Франция	1983	14
3. Пономарев Руслан	Украина	1983	14
4. Бу Сянжи	Китай	1985	13
5. Раджабов Теймур	Азербайджан	1987	14
6. Карякин Сергей	Украина	1990	12
7. Карлсен Магнус	Норвегия	1990	13
8. Кузубов Юрий	Украина	1990	14

♜e8 22. ♜d6! ♝g4 23. ♝e5+ ♜g8 24. ♜e1 ♜d7 25. ♜:d7! ♝:d7 26. ♜f5 положение черных стало безнадежным. Однако тактическая операция Карпова содержала изъян: в случае 17... ♜:f2! возникала весьма острая и неясная игра, ведь нельзя 18. ♝e3 (d2) из-за 18... ♠g5.

17. ♠:g7! Теперь совсем другое дело: 17... ♜:f2 ведет к фиаско, ввиду 18. ♝e3 (d2) и невозможно 18... ♠g5, так как поле g5 под контролем. А на любое взятие конем решает 19. ♝:h6. Таким образом, спустя шестнадцать лет Пономарев усовершенствовал комбинацию Карпова.



17... ♠:g7 18. ♝e2 f5? В растерянности Тукмаков сразу допускает решающую ошибку. Впрочем, после 18... ♜f6 19. de и 20. ♜f5+ у белых, имеющих всего две пешки за фигуру, неотразимая атака. 19. f3 ♜f6 20. ♝:e6 ♜g8 21. ♜:f5+ ♜h7 22. g4 ♝b6 23. ♜he1 ♝:e6. Упорнее 23... ♠f6, но после 24. ♝:b6 ab 25. ♜e6 ♜a6 26. d6 черным возобновить. 24. de ♜:f5 25. gf ♠:h4 26. ♜d7+ ♜e7 27. ♜h1 ♠f6 28. ♜:b7 ♜g8 29. ♜:a7 ♜g5 30. f4 ♜f5 31. ♜f1 ♜g6 32. a4 ♜h5. Здесь черные просрочили время, но могли спокойно сдаться.

Китайский шахматист Бу, который первым стал гроссмейстером в 13 лет, пока не показывал выдающихся результатов, а вот бакинec Раджабов, наоборот, конкурировал даже с Каспаровым, экс-бакинцем.

Каспаров – Раджабов

Линарес, 2003

Французская защита

1. e4 e6 2. d4 d5 3. ♜c3 ♜f6 4. e5 ♜fd7 5. f4 c5 6. ♜f3 ♜c6 7. ♠e3 a6

8. ♝d2 b5 9. a3 ♝b6 10. ♜e2! c4 11. g4 h5 12. gh ♜:h5 13. ♜g3 ♜h8 14. f5 ef 15. ♜:f5 ♜f6! Позволяет наладить игру, так как 16. ♜:g7+ ♠:g7 17. ef ♠:f6 18. ♠g2 ♠f5! явно в пользу черных.

16. ♜g3! ♜g4 17. ♠f4 ♠e6 18. c3 ♠e7 19. ♜g5! 0-0-0 20. ♜:e6 fe 21. ♠e2. Анализ показал, что после 21. ♝e2 ♜h6 черные выдерживали натиск.



21... ♜g5! Отступая конем на h6, Раджабов мог обойтись без жертвы фигуры, но удар в центре очень эффективный, и удержаться от него было трудно. 22. ♝e3. После 22. de? d4 23. 0-0-0 g5! или 22. ♠:e5 ♜:e5 23. de ♠e5 у черных богатые контршансы.

22... ♜d7. Лучше 22... ♠d6 с острой игрой. 23. ♝:e6 ♠h4 24. ♝g4? Правильно было 24. ♝:d5! ♜de8 25. 0-0-0!, и черным несладко. 24...g5!! Каспаров упустил из виду, что сейчас на 25. ♠:g5? есть ответ 25... ♜dg8.

25. ♠d2 ♜de8 26. 0-0-0 ♠a5 27. ♜df1? Редкий просмотр в практике Каспарова. Он на секундочку забыл, что ладья защищала слона, а теперь после шаха конем с b3 король вынужден остаться в центре доски. После 27. ♜b1 ♝g6+ 28. ♜a2 ♜c7 29. ♜hf1 ♜b3 30. ♜f5 ♝e6 возникла совершенно неясная позиция.

27... ♜b3+ 28. ♜d1 ♠:g3! 29. ♜f7. На 29. hg срезу решал шах с g6. 29... ♜d8 30. ♠:g5 ♝g6 31. ♝f5 ♝:f5 32. ♜:f5 ♜df8 33. ♜:f8 ♜:f8 34. ♠f3 ♠h4 35. ♠e3 ♜d7 36. ♠:d5 ♜e8 37. ♠h6 ♜dc5! 38. ♠f7 ♜e7 39. ♠h5 ♜d3. Белые сдались.

Юные гроссмейстеры Магнус Карлсен и Юрий Кузубов играют неровно: наряду с успешными выступлениями случаются и провалы. Но у них все впереди! Ну, а суперрекордсменом безусловно является Сергей Карякин, ставший сильным гроссмейстером уже в 12 лет. Этому уникальному мальчишке мы посвятим следующий выпуск.

Е.Гух

Университеты мира на монетах и банкнотах



Карлов университет в Праге, один из старейших в Европе (год основания - 1348), представлен на монетах и банкнотах Чехословакии, а затем и Чешской республики. Особым вниманием на этих нумизматических памятниках пользовалась старинная печать Карлова университета. На ней изображен император Священной Римской Империи Карл IV с папской буллой об основании университета, преклоняющий колени перед покровителем Чехии св. Вацлавом.